目　　录

第1章 曲 綫 論

1·1 向量記法

在三維欧几里得空間里选取直交笛卡儿坐标系. 习惯上,称普通笛卡儿坐标系的坐标軸为 x 軸、y 軸、z 軸, 把点的坐标写成 (x, y, z), (x', y', z'), (x_1, y_1, z_1) 或 (a, b, c). 但是在本书里稍为改变記法,称坐标軸为 x_1 軸、x_2 軸、x_3 軸,从而采用 (x_1, x_2, x_3), (x'_1, x'_2, x'_3), (a_1, a_2, a_3) 等作为点的坐标. 有时,把 (x_1, x_2, x_3), (a_1, a_2, a_3) 表做 $x_i(i=1, 2, 3)$, $a_j(j=1,2,3)$. 又有时, 預先規定 i, j, k 等为取动值 1, 2, 3 的記号,而单用 x_i, a_j 等来表达. 这个記法的优点在于能够把坐标是 (x_1, x_2, x_3), (a_1, a_2, a_3) 等等的点分别用有关的核文字 x, a 等等本质地表达出来. 从几何看来,只用一个記号表达一物,在直观地理解内容的問題上是重要的. 附在核文字 x, a 等的数字 1, 2, 3 称为**指标**, 本书里用做指标的 i, j, k 都规定为取动值 1, 2, 3 的数.

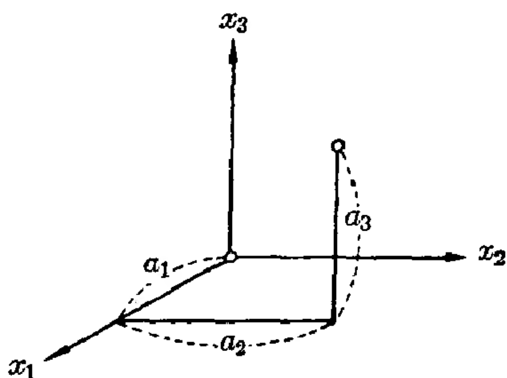


图 1·1

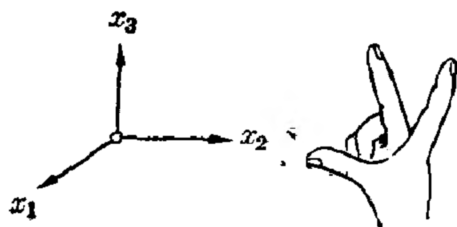


图 1·2

我們作出坐标軸形成右手制的規定. 所謂**右手制**是把右手的大拇指、

食指分别指向 x_1 軸、x_2 軸的正方向时，中指重合 x_3 軸的正方向的系統．(如果 x_3 軸的正方向与中指有反对的方向，便是左手制．)

对空間里定有順序的两点从始点向着終点的綫段称为**有向綫段**或**向量**．用 $\overrightarrow{AB}$ 表达始点 A、終点 B 的向量．当平行移动两向量 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B'}$ 中的一条使始点重合时，如果終点也重合，就称为相等．当 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{A'B'}$ 相等时，記为

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}.$$

$\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BA}$ 是不同的向量．本书里，如沒有混淆不清时，为方便略去矢符．

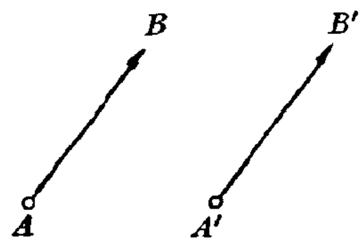


图 1·3

用点 A, B 的坐标 a_i, $b_i (i=1,2,3)$ 作成的 $b_i-a_i (i=1, 2, 3)$ (詳細地，应写作 $(b_1-a_1, b_2-a_2, b_3-a_3)$) 称为 $\overrightarrow{AB}$ 的**支量**．相等的向量有相等的支量；容易知道，反过来也成立．把始点与終点一致的情况当作向量的特殊情况来看待，称为零向量而且記做 0．它的支量是 $(0, 0, 0)$．

向量虽不是数，但也可以考虑加法、减法、乘法．設 $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ 表示支量分别是 x_i, y_i, z_i 的向量，首先 $\mathbf{X}$ 与 $\mathbf{Y}$ 的**和**(記号是 $\mathbf{X}+\mathbf{Y}$) 意味着以 x_i+y_i 为支量的向量．当 $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ 不平行时，把有同一始点的两向量 $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ 当做两边，几何学地作出平行四边形；那末 $\mathbf{X}$ 与 $\mathbf{Y}$ 的和是以这平行四边形的第四頂点为終点而且以公共始点为始点的向量(平行四边形法则)．設 $\mathbf{X}$ 的支量是 x_i，以 $-x_i$ 为支量的向量記作 $-\mathbf{X}$．这样，

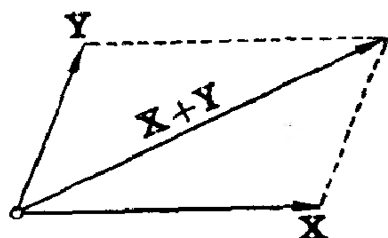


图 1·4

$$\mathbf{X}+(-\mathbf{X})=0, \tag{1·1}$$

其中，右边是零向量．减法决定于

$$\mathbf{X}-\mathbf{Y}=\mathbf{X}+(-\mathbf{Y}). \tag{1·2}$$

就是 $\mathbf{X}-\mathbf{Y}$ 意味着支量是 x_i-y_i 的向量.

如果考察以实数的拼三小組为支量的所有向量，减法也就被包括在加法之中了.

容易驗証

(交換律) $$\mathbf{X}+\mathbf{Y}=\mathbf{Y}+\mathbf{X}, \tag{1·3}$$

(結合律) $$(\mathbf{X}+\mathbf{Y})+\mathbf{Z}=\mathbf{X}+(\mathbf{Y}+\mathbf{Z}). \tag{1·4}$$

乘法有三种. 第一种: 支量是 x_i 的向量 $\mathbf{X}$ 与常数 a 的积(記号是 $a\mathbf{X}$), 意味着支量是 ax_i 的向量. 很明显地成立

(結合律) $$a(b\mathbf{X})=(ab)\mathbf{X}, \tag{1·5}$$

(分配律) $$a(\mathbf{X}+\mathbf{Y})=a\mathbf{X}+a\mathbf{Y}. \tag{1·6}$$

当 $a>0$ 时, $\mathbf{X}$ 与 $a\mathbf{X}$ 有同一取向.

第二种: 称为**内积**或**数量积**,对于两向量 $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$, 作出实数

$$(\mathbf{X}\mathbf{Y})\equiv\sum x_iy_i=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3 \tag{1·7}$$

来定义它. 写法是 $(\mathbf{X}\mathbf{Y}), \mathbf{X}\cdot\mathbf{Y}$ 等. 特别是

$$(\mathbf{X}\mathbf{X})\equiv\mathbf{X}^2\equiv\sum x_i^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2, \tag{1·8}$$

称为向量 $\mathbf{X}$ 的数量平方. 很明显, $\sqrt{(\mathbf{X}\mathbf{X})}$ 表示 $\mathbf{X}$ 的长,从而 $\dfrac{\mathbf{X}}{\sqrt{(\mathbf{X}\mathbf{X})}}$ 表示与 $\mathbf{X}$ 有同一取向而长为 1 的向量. 因此,它的支量是 $\mathbf{X}$ 的方向余弦. 同样,由于 $\mathbf{Y}$ 的方向余弦是 $\dfrac{\mathbf{Y}}{\sqrt{(\mathbf{Y}\mathbf{Y})}}$. 当 $\mathbf{X}$ 与 $\mathbf{Y}$ 所成的角是 θ 时, 便得到

$$\cos\theta=\frac{(\mathbf{X}\mathbf{Y})}{\sqrt{(\mathbf{X}\mathbf{X})(\mathbf{Y}\mathbf{Y})}}. \tag{1·9}$$

从而,几何学地看来, $(\mathbf{X}\mathbf{Y})$ 是 $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ 的长与所成角的余弦相乘的数量. 特别是从(1·9)可以明了,向量 $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ 垂直的条件是

$$(\mathbf{X}\mathbf{Y})=0. \tag{1·10}$$

容易得到

(交換律) $$(\mathbf{XY})=(\mathbf{YX}),\tag{1·11}$$

(分配律) $$\mathbf{X}\cdot(\mathbf{Y}+\mathbf{Z})=\mathbf{X}\cdot\mathbf{Y}+\mathbf{X}\cdot\mathbf{Z}.\tag{1·12}$$

第三种：称为**外积**或**向量积**，对于 $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ 它意味着以

$$x_2y_3-x_3y_2,\quad x_3y_1-x_1y_3,\quad x_1y_2-x_2y_1\tag{1·13}$$

为支量的向量，用記号 $\mathbf{X}\times\mathbf{Y}$ 来表它.

設行列式

$$|\mathbf{X\,Y\,Z}|=\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ z_1 & z_2 & z_3\end{vmatrix}\tag{1·14}$$

表示以 $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$ 的支量为元的行列式，容易看出，

$$\begin{aligned}|\mathbf{X\,Y\,Z}|&=|\mathbf{Y\,Z\,X}|=|\mathbf{Z\,X\,Y}|=-|\mathbf{X\,Z\,Y}|\\&=-|\mathbf{Y\,X\,Z}|=-|\mathbf{Z\,Y\,X}|,\end{aligned}\tag{1·15}$$

$$|\mathbf{X\,Y\,Z}|\,|\mathbf{X'\,Y'\,Z'}|=\begin{vmatrix}(\mathbf{XX'}) & (\mathbf{XY'}) & (\mathbf{XZ'})\\ (\mathbf{YX'}) & (\mathbf{YY'}) & (\mathbf{YZ'})\\ (\mathbf{ZX'}) & (\mathbf{ZY'}) & (\mathbf{ZZ'})\end{vmatrix}.\tag{1·16}$$

可是，
$$\mathbf{X}\cdot(\mathbf{X}\times\mathbf{Y})=|\mathbf{X\,X\,Y}|=0,$$
$$\mathbf{Y}\cdot(\mathbf{X}\times\mathbf{Y})=|\mathbf{Y\,X\,Y}|=0,$$

所以 $\mathbf{X}\times\mathbf{Y}$ 和 $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ 都垂直. 另一方面，

$$\begin{aligned}(\mathbf{X}\times\mathbf{Y})^2&=\begin{vmatrix}x_2 & x_3\\ y_2 & y_3\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_3 & x_1\\ y_3 & y_1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{vmatrix}^2\\&=\begin{vmatrix}x_1^2+x_2^2+x_3^2 & x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3\\ x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3 & y_1^2+y_2^2+y_3^2\end{vmatrix}\\&=\begin{vmatrix}(\mathbf{XX}) & (\mathbf{XY})\\ (\mathbf{XY}) & (\mathbf{YY})\end{vmatrix};\end{aligned}$$

設 θ 是 $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ 所成的角，便有

$$(\mathbf{X}\times\mathbf{Y})^2=(\mathbf{XX})(\mathbf{YY})\begin{vmatrix}1 & \cos\theta\\ \cos\theta & 1\end{vmatrix}$$

$$=(\mathbf{XX})(\mathbf{YY})\sin^2\theta,$$

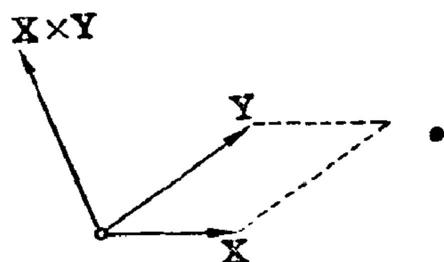


图 1·5

这是由向量 $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ 所作成的平行四边形面积的平方，所以 $\mathbf{X}\times\mathbf{Y}$ 的长等于以 $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ 作成的平行四边形的面积.

現在按照 $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{X}\times\mathbf{Y}$ 等三向量的顺序作出行列式 $|\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{X}\times\mathbf{Y}|$，它等于 $(\mathbf{X}\times\mathbf{Y})^2$，所以是正数. 这表明按这顺序的三向量 $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{X}\times\mathbf{Y}$ 形成右手制.

从以上所述看出，向量积 $\mathbf{X}\times\mathbf{Y}$ 可以几何学地解釋为这样的向量：它和 $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ 都垂直，具有 $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ 所作成的平行四边形的面积的长，而且 $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ 和这向量形成右手制. 容易驗証

$$\mathbf{X}\times\mathbf{Y}=-(\mathbf{Y}\times\mathbf{X}), \tag{1·17}$$

$$\mathbf{X}\times(\mathbf{Y}+\mathbf{Z})=\mathbf{X}\times\mathbf{Y}+\mathbf{X}\times\mathbf{Z}, \tag{1·18}$$

$$\mathbf{X}\cdot(\mathbf{Y}\times\mathbf{Z})=\mathbf{Y}\cdot(\mathbf{Z}\times\mathbf{X})=\mathbf{Z}\cdot(\mathbf{X}\times\mathbf{Y})$$
$$=|\mathbf{X}\,\mathbf{Y}\,\mathbf{Z}|. \tag{1·19}$$

又可証明下列关系式成立：

$$(\mathbf{X}\times\mathbf{Y})\times\mathbf{Z}=(\mathbf{XZ})\mathbf{Y}-(\mathbf{YZ})\mathbf{X}, \tag{1·20}$$

$$(\mathbf{X}\times\mathbf{Y})(\mathbf{X}'\times\mathbf{Y}')=(\mathbf{XX}')(\mathbf{YY}')-(\mathbf{XY}')(\mathbf{YX}'). \tag{1·21}$$

最后式称为 Lagrange 恒等式.

設对于二向量 $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ 成立 $a\mathbf{X}+b\mathbf{Y}=0$，而且存在不同时等于 0 的实数 a, b，就称为 $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ **綫性相关**或者綫性不独立. 在相反的时候，称为 $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ **綫性独立**. 从几何学看来，綫性相关有这样的解釋，把二向量安排到同一始点时，它們在一直綫上.

設在三向量 $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$ 之間成立

$$a\mathbf{X}+b\mathbf{Y}+c\mathbf{Z}=0,$$

而且存在不同时等于0的实数 a, b, c，或者不存在，那末分别称 $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ 是綫性相关，或者綫性独立．这时几何学的解释是这样：当三向量綫性相关时，把它們安排到同一始点，它們在一平面上．为了 $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ 要綫性相关，充要条件是

$$|\mathbf{X}\ \mathbf{Y}\ \mathbf{Z}|=0.$$

【习題】

1．証明

$$(\mathbf{X}\times\mathbf{Y})\times(\mathbf{X}'\times\mathbf{Y}')=|\mathbf{X}\ \mathbf{X}'\ \mathbf{Y}'|\mathbf{Y}-|\mathbf{Y}\ \mathbf{X}'\ \mathbf{Y}'|\mathbf{X}$$
$$=|\mathbf{X}\ \mathbf{Y}\ \mathbf{Y}'|\mathbf{X}'-|\mathbf{X}\ \mathbf{Y}\ \mathbf{X}'|\mathbf{Y}'.$$

2．証明

$$|\mathbf{X}\times\mathbf{X}',\ \mathbf{Y}\times\mathbf{Y}',\ \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}'|=|\mathbf{X}\ \mathbf{X}'\ \mathbf{Y}'|\,|\mathbf{Y}\ \mathbf{Z}\ \mathbf{Z}'|-|\mathbf{X}\ \mathbf{X}'\ \mathbf{Y}|\,|\mathbf{Y}'\ \mathbf{Z}\ \mathbf{Z}'|.$$

1·2 曲綫的参数表示．切綫与密切平面

在微积分里，为表示平面曲綫，經常采用形如

$$y=f(x)$$

的方程．曲綫的这种表示法有三个缺点．第一，关于 x, y，方程的形状不对称；第二，在切綫平行于 y 軸的点，微商 f' 变为 ∞；第三，当 y 軸的平行直綫和所論曲綫在两点以上相交时，$f(x)$ 成为多值函数．为了除去这些缺点，普通采用形如

$$x=f(t),\quad y=g(t),\quad a\leqslant t\leqslant b$$

的参数表示．对于微分几何的目的說来，这个方式較为便利．

我們将主要研究不在一平面上的所有曲綫，即所謂空間曲綫，同上式相类似地采用

$$x_i=f_i(t),\quad a\leqslant t\leqslant b$$

的参数表示来給定空間曲綫．可是，經常在微积分里把函数 $y=f(x)$ 的微商 f', f'' 写成 y', y'' 等的方式．既然这样用了 y', y'' 而不用 f，順便連函数記号 f 也用 y 来表达，选取 $y=y(x)$ 来替

代 $y=f(x)$，显然是經济的．在这样意义下，我們把曲綫的参数表示写成

$$x_i=x_i(t),\quad a\leqslant t\leqslant b. \tag{1·22}$$

当然假定(1·22)的右边 $x_i(t)$ 都是連續函数．如果 $x_i(t)$ 仅仅是連續函数，如在数学分析和集合論中所討論的，呈現种种病态的曲綫必須列入討論．但是，在微分几何里为能广泛使用微分学，选取非病态的平滑曲綫做考察对象．从分析学看来，这意味着假定了函数 $x_i(t)$ 的微分可能性．

当函数 $f(t)$ $(a\leqslant t\leqslant b)$ 具有 r 阶 $(r\geqslant 1)$ 为止的微商，而且这些微商又是連續函数时，称为 C^r 級函数．当曲綫 (1·22) 中的 $x_i(t)$ 都是 C^r 級，并且 $\dfrac{dx_i}{dt}=\dot{x}_i$ 不同时等于 0，即

$$\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^2>0 \tag{1·23}$$

的时候，称它为 C^r 級**曲綫**．

对一条有参数表示的曲綫附上参数增加的方向，在它的各点都有对应的参数值．

当曲綫的参数表示是 C^r 級 $(r\geqslant 1)$ 时，曲綫是其切綫連續地变更的所謂平滑曲綫．說到参数表示是 C^r 級，曲綫本身要受到限制的同时，它的参数表示也要受到限制．

在本书里如无特别声明，都規定曲綫是 $C^r(r\geqslant 3)$ 級的．

例 取一个以 x_3 軸为軸，半徑等于 a 的正圓柱，把一張用紙做的一角等于 α 的直角三角形卷到它的上面，使 α 角的頂点落在 $(a, 0, 0)$ 的点，而且

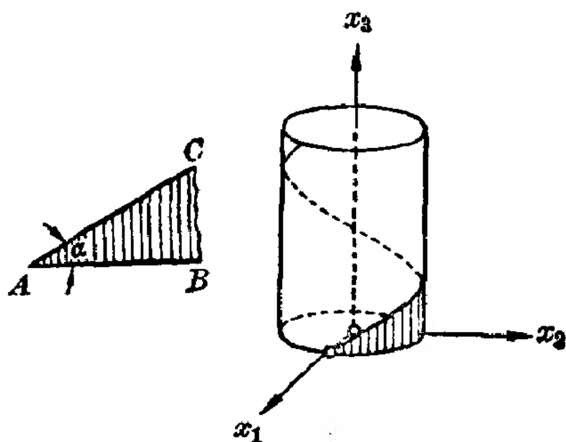


图 1·6

非斜边的夹边圍成 x_1x_2 平面上的半徑 a 和中心(0, 0, 0) 的圓周。这时，直角三角形斜边上的点是由方程

$$x_1=a\cos t,\quad x_2=a\sin t,\quad x_3=at\tan\alpha \tag{1·24}$$

表示的曲綫的点。

如果考虑到曲綫在圓柱的 $x_3<0$ 部分也同样卷上的情况，(1·24) 式的 t 的变域是 $-\infty<t<+\infty$。我們也可以按照图 1·6 的斜綫部分关于 x_1x_3 平面是对称的位置把三角形的紙头卷上圓柱。这些空間曲綫称为**常螺綫**。这圓柱的軸称为常螺綫的軸。

(1·24) 式的右边函数都是无穷次可微分的，并可展开为冪級数(所謂解析函数)。此外，

$$\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^2>0.$$

称这种曲綫为**解析曲綫**或 C^ω **級曲綫**。

在曲綫 $C: x_i=x_i(t),\ a\leqslant t\leqslant b$ 上，对应于参数 t 的点用向量記法簡写为 $\mathbf{x}(t)$，或者有时候称它为点 t。

根据微积分里所教的內容，C 的长是用具有支量 $\dot{x}_i\equiv\dfrac{dx_i}{dt}$ 的向量 $\dot{\mathbf{x}}$ 的数量平方

$$L=\int_a^b\sqrt{\dot{\mathbf{x}}^2}\,dt$$

来給定的。从而，从点 $\mathbf{x}(a)$ 到 C 上的一般点 $\mathbf{x}(t)$ 为止的 C 的弧长是

$$s=\int_a^t\sqrt{\dot{\mathbf{x}}^2}\,dt. \tag{1·25}$$

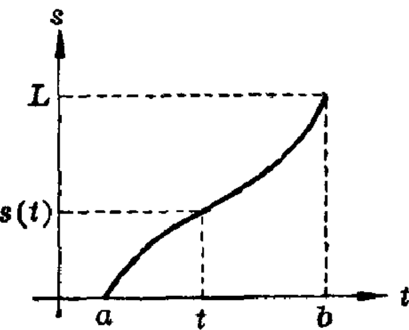


图 1·7

由于 (1·25) 式中的被积分函数是正的，把 s 看作 t 的函数时，$s(t)$ 是 t 的严格单調增加函数 (图 1·7 是 $s(t)$ 的图表的一例)。这样，$a\leqslant t\leqslant b$ 的点与 $0\leqslant s\leqslant L$ 的点做成一对一的对应，所以可以选取孤长 s 为曲线 C 的

参数．从(1·25)得到

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{\dot{\mathbf{x}}^2}>0,$$

$s(t)$ 是 t 的 C^r 級函数，而反过来逆函数 $t(s)$ 也是同样的。把 $t=t(s)$ 代进(1·22)，便获得 C 的按照 s 的参数表示

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}(t(s)),\quad 0\leqslant s\leqslant L.$$

写出

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds}=\mathbf{x}'$$

并注意

$$\mathbf{x}'=\dot{\mathbf{x}}\frac{dt}{ds},$$

就可看出

$$\mathbf{x}'^2=1. \tag{1·26}$$

从(1·25)看出点 $\mathbf{x}(t)$，$\mathbf{x}(t+\Delta t)$ 間的弧长是

$$\Delta s=\int_t^{t+\Delta t}\sqrt{\dot{\mathbf{x}}^2}\,dt.$$

当 Δt 是无穷小时，除了高次无穷小外，改变量 Δs 等于 $\Delta s=\sqrt{\dot{\mathbf{x}}^2}\Delta t$. 写 $\Delta t=dt$，并且称 $ds=\sqrt{\dot{\mathbf{x}}^2}dt$ 为函数 $s(t)$ 的微分．同样，函数 $\mathbf{x}(t)$ 的微分是 $d\mathbf{x}=\dot{\mathbf{x}}\,dt$，所以得到

$$ds^2=(d\mathbf{x})^2=dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2. \tag{1·27}$$

称 ds 为曲綫的**綫素**.

在微分几何里把(1·27)說成是决定曲綫上两个无限邻近点間的距离的式子．dx_1, dx_2, dx_3 是微分，从而是无穷小量，表示趋近于0的状态而并不是有什么确定的大小．因此，此式的意义似乎模糊不明，但实际使用它的时候，是在(1·25)式的形式下来使用的，从而不发生模糊.

仅以无穷小量相隔的两点 $\mathbf{x}(t)$，$\mathbf{x}(t+dt)$ 間的距离，按照毕

塔哥拉斯定理，除了高次无穷小量略而不計外，等于上述的 ds^2，所以把曲綫的长定义为內接多角形的长的上限时，(1·27) 式直观地表明了这个长的定义。

如所知，曲綫 C 上的点 $\mathbf{x}(t)$ 的**切綫**是連接点 $\mathbf{x}(t)$ 与点 $\mathbf{x}(t+\Delta t)$ 的直綫当 $\Delta t \to 0$ 时处在极限位置的直綫。

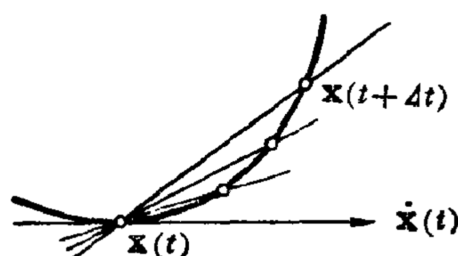


图 1·8

連接点 $\mathbf{x}(t)$ 到 $\mathbf{x}(t+\Delta t)$ 的向量具有支量

$$x_i(t+\Delta t)-x_i(t).$$

用同一 Δt 来除这些支量，大小虽有改变，而向量的方向不变．由于曲綫是 C^r 級 $(r \geqslant 3)$，那末当 $\Delta t \to 0$ 时，

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{x_i(t+\Delta t)-x_i(t)}{\Delta t}$$

存在，而且等于 $\dot{x}_i(t)$．因此，在点 $\mathbf{x}(t)$ 的切綫的方程是

$$\mathbf{X}-\mathbf{x}(t)=\rho \dot{\mathbf{x}}(t), \tag{1·28}$$

式中 ρ 表示参数．以点 $\mathbf{x}(t)$ 为始点而有支量 $\dot{x}_i(t)$ 的向量 $\dot{\mathbf{x}}$ 称为 C 在点 $\mathbf{x}(t)$ 的**切綫向量**.

特别是，当参数 t 是弧长 s 时，切綫向量 $\mathbf{x}'$ 是单位向量，从而它的支量 x_i' 表示切綫的方向余弦．

我們用 $\mathbf{x}(t)$ 与 $\mathbf{x}(t+\Delta t)$ 的連綫当 $\Delta t \to 0$ 时所处的极限位置定义了切綫，类似于这种的极限过程的操作在微分几何里是重要的方法．为了直观地叙述这样的极限过程，有时把它說成“切綫是通过曲綫上两个邻点的直綫”．虽然并沒有紧密地与点 $\mathbf{x}(t)$ 相邻接的点，但是，如果照上面所述加以解釋，就可以看作严密的术語了．

設 a_i 是同时不等于 0 的常数，且以 a_i 为支量的单位向量是 $\mathbf{a}$,

那末通过曲綫上的点 $\mathbf{x}(t)$ 的直綫的方程可写为

$$\mathbf{X}-\mathbf{x}(t)=\rho\mathbf{a}.$$

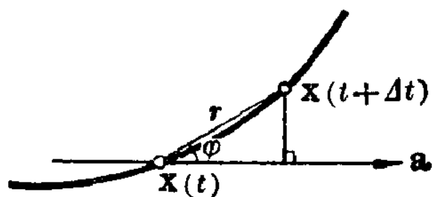


图 1·9

如图 1·9 所示,定义 r, φ; 从点 $\mathbf{x}(t+\Delta t)$ 向这直綫引的垂綫的长是 $r\sin\varphi$. 可是

$$r=\sqrt{[\mathbf{x}(t+\Delta t)-\mathbf{x}(t)]^2},$$

$$\sin\varphi=\sqrt{1-\frac{\{\mathbf{a}[\mathbf{x}(t+\Delta t)-\mathbf{x}(t)]\}^2}{\mathbf{a}^2[\mathbf{x}(t+\Delta t)-\mathbf{x}(t)]^2}},$$

并且以

$$\mathbf{x}(t+\Delta t)=\mathbf{x}(t)+\dot{\mathbf{x}}\Delta t+\frac{\ddot{\mathbf{x}}}{2!}\Delta t^2+[3]$$

([3]是关于 Δt 的三次无穷小量)代入,就有

$$r\sin\varphi=\sqrt{(\mathbf{a}\times\dot{\mathbf{x}})^2\Delta t^2+(\mathbf{a}\times\dot{\mathbf{x}})\cdot(\mathbf{a}\times\ddot{\mathbf{x}})\Delta t^3+[4]}.$$

因此,所論垂綫的长一般是 Δt 的一次无穷小量,而且当

$$\mathbf{a}\times\dot{\mathbf{x}}=0$$

时,即所論直綫是 C 在点 $\mathbf{x}(t)$ 的切綫时,可以看出它是 Δt 的二次无穷小量. 在这意义下可以說,在点 $\mathbf{x}(t)$ 最貼近曲綫 C 的直綫要算是切綫.

通过曲綫 C 上的点 $\mathbf{x}(t)$ 而且与 $\mathbf{x}(t)$ 的切綫垂直的平面,称为 C 在点 $\mathbf{x}(t)$ 的**法平面**. 法平面的方程是

$$\dot{\mathbf{x}}(t)(\mathbf{X}-\mathbf{x}(t))=0. \tag{1·29}$$

通过曲綫 C 上的点 $\mathbf{x}(t)$ 和同它充分靠近的点 $\mathbf{x}(t+\Delta_1 t)$, $\mathbf{x}(t+\Delta_2 t)$, 引一平面;当 $\Delta_1 t$, $\Delta_2 t$ 独立地趋近 0 时,称这极限位置的平面为 C 在点 $\mathbf{x}(t)$ 的**密切平面**.

为求它的方程,很明显地通过所給定三点的平面的方程是

$$|\mathbf{X}-\mathbf{x}(t)\quad \mathbf{x}(t+\Delta_1 t)-\mathbf{x}(t)\quad \mathbf{x}(t+\Delta_2 t)-\mathbf{x}(t)|=0.$$

从此应用平均值定理就变成

$$|\mathbf{X}-\mathbf{x}(t) \quad \dot{\mathbf{x}}(t+\theta_1\Delta_1 t) \quad \dot{\mathbf{x}}(t+\theta_2\Delta_2 t)|=0,$$

$$0<\theta_1,\ \theta_2<1.$$

从第三列减去第二列,并再应用平均值定理,便可写成

$$|\mathbf{X}-\mathbf{x}(t) \quad \dot{\mathbf{x}}(t+\theta_1\Delta_1 t) \quad \ddot{\mathbf{x}}(t+\overline{\Delta t})|=0,$$

式中 $\overline{\Delta t}$ 表示介于 $\theta_1\Delta_1 t$, $\theta_2\Delta_2 t$ 之間的一个数. 如果在最后方程里 $\Delta_1 t\to 0$, $\Delta_2 t\to 0$, 便得到极限位置的平面的方程

$$|\mathbf{X}-\mathbf{x} \ \ \dot{\mathbf{x}} \ \ \ddot{\mathbf{x}}|=0. \tag{1·30}$$

但是,当 $\dot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}}=0$ 时, 即曲綫与其在点 $\mathbf{x}(t)$ 的切綫做成高次接触时(就是說,从 $\mathbf{x}(t+\Delta t)$ 向在 $\mathbf{x}(t)$的切綫所引垂綫的长是 Δt 的高于二次无穷小量时), 以 $\mathbf{x}^{(p)}$ 表示 $\mathbf{x}$ 的 p 阶微商, 并且利用 $\dot{\mathbf{x}}\times\mathbf{x}^{(p)}\neq 0$ 的最小整数 p, 便可把密切平面的方程写成

$$|\mathbf{X}-\mathbf{x}(t) \quad \dot{\mathbf{x}}(t) \quad \mathbf{x}^{(p)}(t)|=0.$$

我們可以这样說,密切平面是通过曲綫上相邻三点的平面.

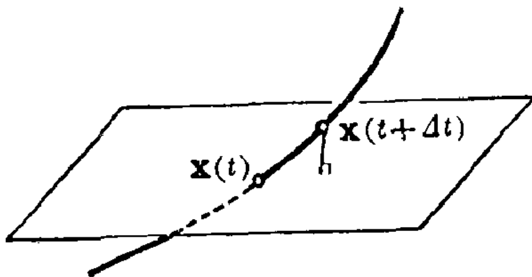


图 1·10

通过点 $\mathbf{x}(t)$ 的平面的方程是

$$\mathbf{a}(\mathbf{X}-\mathbf{x}(t))=0,$$

其中 $\mathbf{a}$ 表示单位法綫向量. 从点 $\mathbf{x}(t+\Delta t)$ 向这平面所引的垂綫的长是

$$\mathbf{a}[\mathbf{x}(t+\Delta t)-\mathbf{x}(t)]=\mathbf{a}\left[\dot{\mathbf{x}}\,\Delta t+\frac{\ddot{\mathbf{x}}}{2}\Delta t^2+\cdots\right].$$

只当 $\mathbf{a}\dot{\mathbf{x}}=0$, $\mathbf{a}\ddot{\mathbf{x}}=0$ 时, 这长关于 Δt 才是三次无穷小量. 所以可以这样說, 在点 $\mathbf{x}(t)$ 的密切平面是通过点 $\mathbf{x}(t)$ 而与曲綫 C 最貼近的平面.

在点 $\mathbf{x}(t)$ 的密切平面上, 通过 $\mathbf{x}(t)$ 并垂直于切綫 $\dot{\mathbf{x}}(t)$ 的直綫, 称为 C 在 $\mathbf{x}(t)$ 的**主法綫**. 又通过 $\mathbf{x}(t)$ 并垂直于密切平面的直綫,称为**副法綫**. 切綫和副法綫决定的平面,称为**化直平面**。

【习题】

1. 由 $x_i = x_i(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$ 所給定的曲綫要变为平面曲綫的充要条件是

$$|\dot{\mathbf{x}}\ \ddot{\mathbf{x}}\ \dddot{\mathbf{x}}| = 0.$$

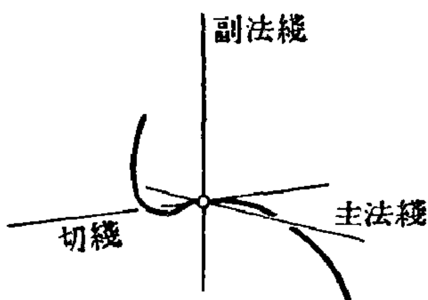


图 1·11

2. 如果空間曲綫 C 的密切平面都通过一个定点，那末 C 是平面曲綫。

3. 求空間三次曲綫 C: $x_1 = t$, $x_2 = t^2$, $x_3 = t^3$ 在点 t 的密切平面的方程。証明 C 上三点的密切平面的交点在通过这三点的平面上。

1·3 Frenet 标形与 Frenet 公式

在解析几何里討論椭圆、双曲綫和抛物綫的性质时，我們总是把它們的方程化为标准型来进行，較为方便。所謂标准型是对于这些曲綫选取有显著关系的坐标軸并关于这些坐标軸表达的方程。关于二次曲綫以外的曲綫虽也有同样的事情，可是我們研究对象不是特殊曲綫而是一般曲綫，对于給定曲綫并不存在唯一确定的、被认为对这定曲綫的性质研究是便利的坐标軸。但是，在微分几何里研究曲綫性质中的局部性质，这是第一目的，所以对这个目的說来，在曲綫 C 上的点 $\mathbf{x}(t)$ 选取点 $\mathbf{x}(t)$ 做原点而且采用被认为同曲綫 C 最密切連系着的坐标軸，要算是最便利了。这样一来，当然会想到选取同 C 最貼近的切綫做第一軸，而且把第一、第二軸所决定的平面安排到同 C 最密切連系着的密切平面，从而第二軸是主法綫，第三軸是副法綫。我們还須确定这些軸的正向。

为方便，取 C 的弧长 s 为参数。C 上附有参数 s 的增加方向，而且向量 $\mathbf{x}'(s)$ 在点 $\mathbf{x}(s)$ 眞正地表示这个正向。我們选取这个方向为第一軸的正向。因为

$$\mathbf{x}'^2 = 1, \tag{1·31}$$

微分后便得到

$$\mathbf{x}'\mathbf{x}''=0. \tag{1·32}$$

从而向量 $\mathbf{x}''$ 垂直于 $\mathbf{x}'$. 注意到 $\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}''$ 所决定的平面就是密切平面这个事实,便看出 $\mathbf{x}''$ 是朝着主法綫的方向的. 因此,置

$$\xi_1=\mathbf{x}', \tag{1·33}$$

并置

$$\mathbf{x}''=k\xi_2, \tag{1·34}$$

其中

$$k=\sqrt{\mathbf{x}''^2}, \tag{1·35}$$

ξ_1, ξ_2 是互相垂直的单位向量, 而分别地朝着 $\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}''$ 的同一方向的. 又置

$$\xi_3=\xi_1\times\xi_2, \tag{1·36}$$

很明显地 ξ_3 是朝着副法綫的方向的.

我們在(1·34)虽然沒有交代, 而假定了 $k\neq 0$. 如果 $k=0$, ξ_2 就不能唯一地确定. 容易看出, $k=0$ 的点是切綫同 C 做成高次接触的点(即从点 $\mathbf{x}(s+\varDelta s)$ 向点 $\mathbf{x}(s)$ 的切綫所引垂綫的长是 $\varDelta s$ 的高于二次无穷小量的一种点). 我們选定 ξ_1, ξ_2, ξ_3 所指的方向, 分别作为切綫、主法綫、副法綫的正向. 这样, 切綫、主法綫、副法綫作成的坐标軸是右手制.

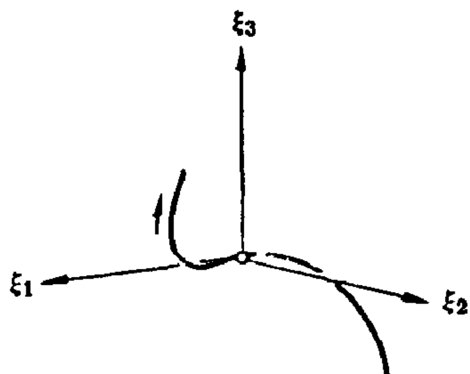


图 1·12

在解析几何里經常为了用图表示坐标系, 采取各坐标軸上从原点引出的单位向量.

我們以后称这样的图形为**标形**. 以 $\mathbf{x}(t)$ 为原点而由上述的 ξ_1, ξ_2, ξ_3 构成的标形, 記为 $\mathbf{x}(t)\xi_1\xi_2\xi_3$, 并且称为曲綫 C 的 **Frenet 标形**.

对曲綫 C 上各点邻域的性质的研究, 在各点使用 Frenet 标形来得方便. 从而, 随着曲綫参数 t 的变化而得到活动的一系标形,

我們把这些标形总括一起作为考察的对象．所以这样考察标形系是因为，Frenet 标形同給定的曲綫具有密切的几何学关系的位置，所給定的曲綫除了作为这些标形的原点的軌迹而存在外，更深刻地表現这曲綫的几何学性质的直接手段也是同时被給定了的．

我們就是这样到达了随着参数的变化而动的标形，这种新想法是从来无論在微积分和解析几何里所沒有过的．

这个**活动标形**的想法在本书所述的欧几里得微分几何以外的微分几何里同样可以适用，并且与群論、拓扑学中均属重要的連續群論頗有密切关系，而近年来特别看到了它的重要性．

伴随在曲綫 C 的各点的 Frenet 标形 $\mathbf{x}\xi_1\xi_2\xi_3$，随着参数的变化而动．現在将闡明它的变化状态．取弧长 s 为参数，首先要成立

$$\mathbf{x}'=\xi_1,$$

$$\xi_1'=k\xi_2.$$

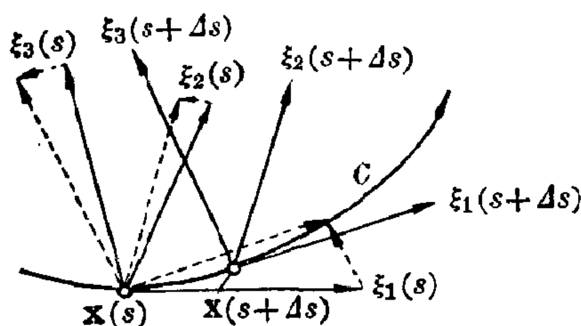


图　1·13

其次，要討論 ξ_2'．由于 ξ_2 是单位向量，这向量 ξ_2' 垂直于 ξ_2，从而可以写成

$$\xi_2'=a_1\xi_1+a_2\xi_3.$$

作出这式两边与 ξ_1 的数量积，便得到

$$\xi_1\xi_2' \quad a_1.$$

可是

$$\xi_1\xi_2=0,$$

所以

$$\xi_1\xi_2'=-\xi_1'\xi_2=-k,$$

$$\therefore\quad a_1=-k.$$

改写 a_2 为 w，就可写出

$$\xi_2' = -k\xi_1 + w\xi_3.$$

完全同样地，对 ξ_3' 先把它写为

$$\xi_3' = b_1\xi_1 + b_2\xi_2,$$

便有

$$\xi_1\xi_3' = b_1,$$

$$\therefore \quad b_1 = -\xi_1'\xi_3 = -k\xi_2\xi_3 = 0.$$

又

$$\xi_2\xi_3' = b_2,$$

$$\therefore \quad b_2 = -\xi_2'\xi_3 = (k\xi_1 - w\xi_3)\xi_3 = -w.$$

因此，导出

$$\xi_3' = -w\xi_2.$$

把以上結果綜合起来，便成为下列公式：

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \xi_1, \\ \xi_1' &= \qquad k\xi_2, \\ \xi_2' &= -k\xi_1 \qquad + w\xi_3, \\ \xi_3' &= \qquad -w\xi_2. \end{aligned}\right\} \tag{1·37}$$

称它为 Frenet 公式或者 Frenet-Serret 公式。如下文所陆續說明的，空間曲綫的微分几何性质全是在这公式的基础上导出来的，它是空間曲綫論的基础公式。

作为 Frenet 公式的直接应用，将查明曲綫 C 上一点 $\mathbf{x}_0$ 的邻域中曲綫的形状。

为方便，把所論的点取做量弧长 s 的起点。这时在点 $\mathbf{x}_0$ 的邻域里曲綫可以展开为冪級数

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}_0 + (\mathbf{x}')_0 s + (\mathbf{x}'')_0 \frac{s^2}{2!} + (\mathbf{x}''')_0 \frac{s^3}{3!} + \cdots \tag{1·38}$$

(在微分可能性不高的时候展开到一段为止，但是采用平均值定理的形式)。根据 Frenet 公式，

$$\mathbf{x}'=\xi_1,\quad \mathbf{x}''=k\xi_2,$$
$$\mathbf{x}'''=-k^2\xi_1+k'\xi_2+kw\xi_3,$$

所以写 $\xi_i(0)$ 为 ξ_i，就得到

$$\mathbf{x}(s)-\mathbf{x}_0=y_1\xi_1+y_2\xi_2+y_3\xi_3,$$

式中

$$\left.\begin{aligned} y_1&=s-\frac{k_0^2}{6}s^3+\cdots,\\ y_2&=\frac{k_0}{2}s^2+\frac{k_0'}{6}s^3+\cdots,\\ y_3&=\frac{k_0w_0}{6}s^3+\cdots. \end{aligned}\right\}\tag{1·39}$$

因此，以点 $\mathbf{x}_0$ 的 Frenet 标形为参考系，所論的曲綫在点 $\mathbf{x}_0$ 的邻域的形状是决定于(1·39)式的.

这样一来，C 在 $\mathbf{x}_0$ 的密切平面上的正射影逼近抛物綫

$$x_2=\frac{k_0x_1^2}{2};$$

在 $\mathbf{x}_0$ 的切綫、副法綫所确定平面上的正射影逼近

$$x_3=\frac{k_0w_0x_1^3}{6},$$

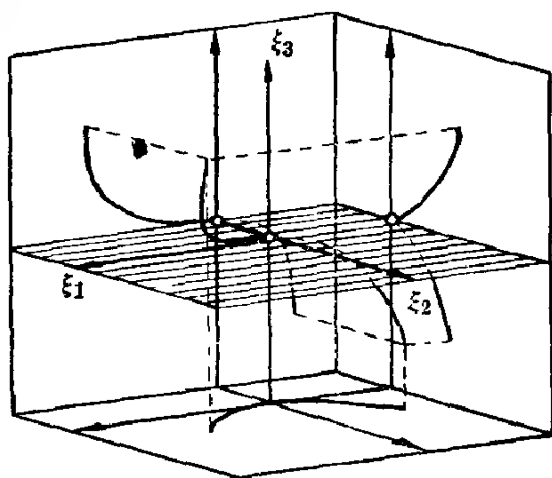


图 1·14

而且在 $\mathbf{x}_0$ 的主法綫、副法綫所确定平面上的正射影逼近

$$2x_2^3=\frac{9k_0}{w_0^2}x_3^2.$$

称(1·39)为 **Bouquet 公式.**

【习题】

1. 設空間曲綫 C 上的相邻两点是 M, M' 而且在这两点的切綫的公共垂綫是 l，証明当 M' 无限趋近 M 时，l 的极限位置是 C 在 M 的副法綫.

2. 設在曲綫 C 的一点 s_0 是 $k(s_0)\neq 0$, $w(s_0)\neq 0$，那末在这点的密切平

面是通过切綫 $\xi_1(s_0)$ 而把 s_0 的邻域的部分弧分成两部分，使分别地属于这平面的两个不同側的唯一平面。

1·4 曲率与撓率

在討論 Frenet 公式所包含的意义之前，首先說明这里面出現的两个量 $k(s)$，$w(s)$ 的几何学意义。

取定点 O 为中心且作出半徑等于 1 的球面（称为单位球面）。对于 C 上的点 s 取以 O 为始点的向量 $\xi_1(s)$ 同它对应，那末它的終点在球面上画出曲綫。我們說，把 C 映照到球面上来，并且称这映象为**按照切綫的球面表示**，称这象曲綫为原曲綫 C 的**切綫象**。設在点 $\mathbf{x}(s)$，$\mathbf{x}(s+\Delta s)$ 的切綫 $\xi_1(s)$，$\xi_1(s+\Delta s)$ 所成的角是 $\Delta\theta$，而且 C 的切綫象的点 $\xi_1(s)$，$\xi_1(s+\Delta s)$ 間的弧长是 $\Delta\sigma$，那末 $\lim\limits_{\Delta\sigma\to 0}\dfrac{\Delta\theta}{\Delta\sigma}=1$，且从而按(1·25)的下面一式的导出过程得到

$$\xi_1'^2=\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2=\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2.$$

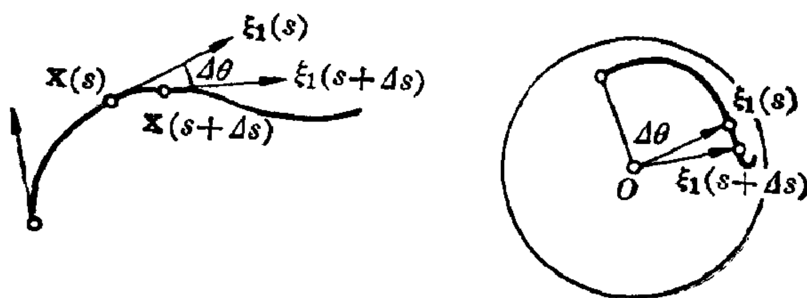


图 1·15

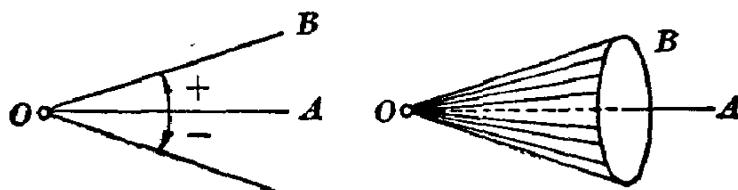


图 1·16

因此，从(1·37)导出

$$k^2=\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2. \tag{1·40}$$

可是在平面上对两直綫 OA, OB 所成的角可以按照回轉 $\overrightarrow{OA}$ 使重合 $\overrightarrow{OB}$ 时的回轉方向确定 $\angle AOB$ 的正負符号，但是在空間里就不能区别角的正負．所以我們常把 $\xi_1(s)$, $\xi_1(s+\Delta s)$ 的交角 $\Delta\theta$ 看做正角．从而，由上式导出

$$k=\frac{d\theta}{ds}, \tag{1·41}$$

就是

$$k=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta s}. \tag{1·42}$$

称 $k(s)$ 为曲綫 C 在所論一点 $\mathbf{x}(s)$ 的**曲率**．所以这样称呼是由于它表达曲綫弯曲情况的緩急度．半徑 a 的圓的曲率是 $\frac{1}{a}$，如果取同长的圓弧做比較，半徑越大就是曲率越小，弯曲情况就越和緩．以这事实为比喻，便可明了．仿效圓的例子，称

$$\rho(s)=\frac{1}{k(s)} \tag{1·43}$$

为 C 在其一点 $\mathbf{x}(s)$ 的**曲率半徑**．

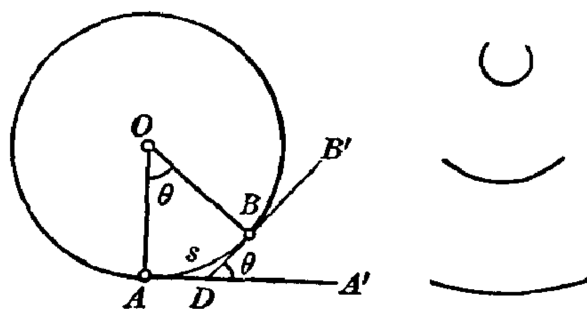


图 1·17

通过曲綫 C 上的相邻三点的圓，称为**密切圓**或**曲率圓**．同密切平面的定义做比較，便可明了曲率圓在密切平面上．我們将証这个圓的半徑就是曲率半徑．这样一来，曲率是表达曲綫弯曲情况的緩急度这一事实，又从一个与(1·42)不同的形式得到了証明．

由于向量 $\mathbf{x}''$ 是在密切平面上表明了关于切綫的曲綫弯曲的一側，而且它的长度是曲率 $k(s)$，有时称 $\mathbf{x}''$ 为**曲率向量**．

設曲綫 C 上的点 $\mathbf{x}(s)$ 的两相邻点是 $\mathbf{x}(s+\Delta_1 s)$，$\mathbf{x}(s+\Delta_2 s)$，并且考察通过这三点的圓. 当 $\Delta_1 s$, $\Delta_2 s$ 独立地趋近 0 时，便有可以看作这个圓的极限的一个圓，这就是 C 在点 $\mathbf{x}(s)$ 的曲率圓.

通过曲綫 C 上的三点 $\mathbf{x}(s)$，$\mathbf{x}(s+\Delta_1 s)$，$\mathbf{x}(s+\Delta_2 s)$ 所引的圓，当然在包含这圓的球面上. 現在，取这样球面中的任何一个，設它的中心是 $\mathbf{a}$，半徑是 r，那末

$$(\mathbf{x}-\mathbf{a})^2=r^2$$

是这个球面的方程，而上述三点的坐标都必須滿足它. 所以，置

$$f(s)\equiv(\mathbf{x}(s)-\mathbf{a})^2-r^2, \tag{1·44}$$

便必須同时成立三个方程

$$f(s)=0, \quad f(s+\Delta_1 s)=0, \quad f(s+\Delta_2 s)=0.$$

从此按照 Rolle 定理得出

$$f'(s+\theta_1\Delta_1 s)=0, \quad f'(s+\theta_2\Delta_2 s)=0, \quad 0<\theta_1,\ \theta_2<1. \tag{1·45}$$

再一次应用 Rolle 定理，便得到

$$f''(s+\overline{\Delta}s)=0, \tag{1·46}$$

式中 $\overline{\Delta}s$ 表示介于 $\theta_1\Delta_1 s$, $\theta_2\Delta_2 s$ 之間的数. 在 (1·45)，(1·46) 里，$\Delta_1 s\to 0$, $\Delta_2 s\to 0$，就可看出

$$f(s)=0$$

和

$$f'(s)=0, \quad f''(s)=0 \tag{1·47}$$

这三个方程对于包含曲率圓在內的球的中心 $\mathbf{a}$ 与半徑 r 必須成立.

可是从 (1·47) 得到

$$\mathbf{x}'(\mathbf{x}-\mathbf{a})=0,$$

$$\mathbf{x}''(\mathbf{x}-\mathbf{a})+1=0.$$

其中第一式表明了包含曲率圓的球的中心 $\mathbf{a}$ 与点 $\mathbf{x}(s)$ 的連綫垂直于切綫，从而

$$\mathbf{a}=\mathbf{x}(s)+\lambda\xi_2+\mu\xi_3.$$

把它代入上面的第二式里，便导出

$$k\xi_2(-\lambda\xi_2-\mu\xi_3)+1=0,$$

$$\therefore\quad \lambda=\frac{1}{k}=\rho.$$

可是曲率圓是这球与密切平面的交綫，从而曲率圓的中心是这个球心在密切平面上的正射影的点 $\mathbf{x}(s)+\rho\xi_2$。这表明了曲率圓的半徑是曲率的倒数 ρ。

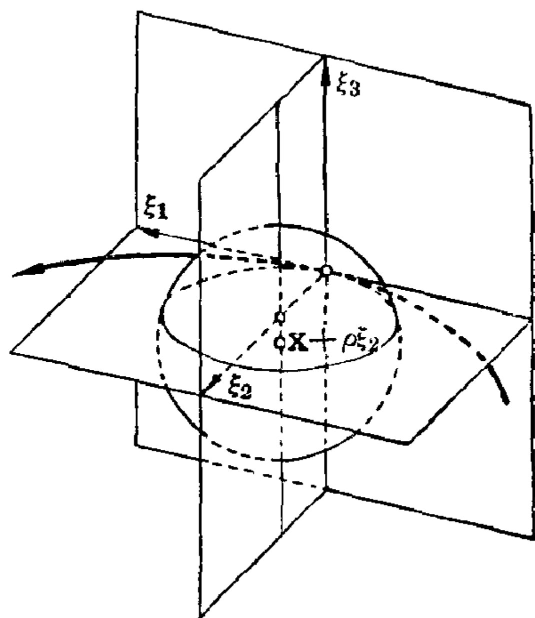


图 1·18

其次，将求 Frenet 公式中出現的函数 w 的几何学意义。

設 C 在点 $\mathbf{x}(s)$，$\mathbf{x}(s+\Delta s)$ 的密切平面所成的角是 $\Delta\phi$。从定点 O 引 C 的副法綫向量 $\xi_3(s)$ 时，它的終点在单位球面上画曲綫。如果称它为 C 的**副法綫象**，$\Delta\phi$ 等于 C 的副法綫象上两点 $\xi_3(s)$，$\xi_3(s+\Delta s)$ 間的球面距离。从而得到

$$\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2=\xi_3'^2=w^2, \tag{1·48}$$

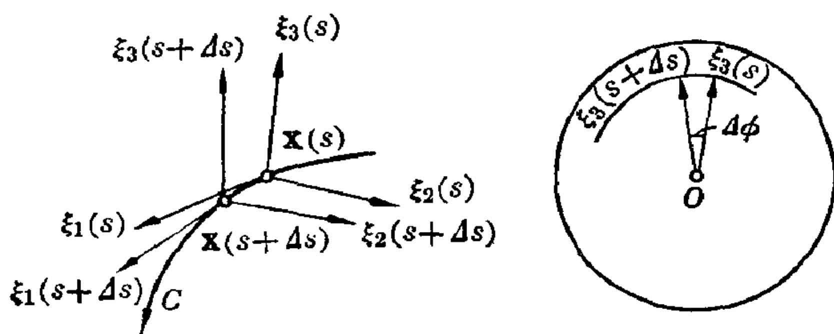


图 1·19

就是

$$w^2=\left(\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\phi}{\Delta s}\right)^2.$$

可是从$(1\cdot 37)_3$成立

$$w=\xi_2'\xi_3=|\xi_1\ \xi_2\ \xi_2'|.$$

把(1·33)，(1·34)代入这里来，便得到

$$w=\frac{|\mathbf{x}'\ \mathbf{x}''\ \mathbf{x}'''|}{k^2}. \tag{1·49}$$

另一方面，从所論曲綫的点 $\mathbf{x}(s+\Delta s)$ 向密切平面

$$\xi_3(\mathbf{X}-\mathbf{x}(s))=0$$

引垂綫，因为

$$\mathbf{x}(s+\Delta s)=\mathbf{x}(s)+\mathbf{x}'\Delta s+\mathbf{x}''\frac{\Delta s^2}{2!}+\mathbf{x}'''(s+\theta\Delta s)\frac{\Delta s^3}{3!},$$

$$0<\theta<1,$$

所引垂綫的长 $h(s,\ \Delta s)$ 是

$$h(s,\ \Delta s)=\frac{|\mathbf{x}'(s)\quad \mathbf{x}''(s)\quad \mathbf{x}'''(s+\theta\Delta s)|}{6k}\Delta s^3$$

$$\doteq\frac{|\mathbf{x}'(s)\quad \mathbf{x}''(s)\quad \mathbf{x}'''(s)|}{6k}\Delta s^3$$

$$=\frac{kw\Delta s^3}{6}. \tag{1·50}$$

如果在点 $\mathbf{x}(s)$，$w=0$，C 在这点要同密切平面做成高次接触。特别是，对于 $0\leqslant s\leqslant L$ 的所有 s 如果 $w\equiv 0$，那末可以証明 C 不外乎是平面曲綫．希望讀者自己作出这証明。

从上述的事实看出，如果在点 $\mathbf{x}(s)$，$k\neq 0$ 的大前提之下 $w\neq 0$，那末 $h(s,\ \Delta s)\neq 0$，所以曲綫 C 不仅要在密切平面內部弯曲，而且还要从这平面脫离出去（要变成非平面曲綫），就是說曲綫要扭撓起来．如果 k 和 Δs 的值相同，从 (1·50) 看出 $h(s,\ \Delta s)$ 和 w 的值的大小成比例．因此，w 可以看做表达这个扭撓的緩急度的数量，

从而我們称 $w(s)$ 为曲綫 C 在点 $\mathbf{x}(s)$ 的**撓率**.

从(1·50)得知,如果 w 在点 $\mathbf{x}(s)$ 不是 0, $h(s, \Delta s)$ 和 $|\Delta s|$ 虽都是很小,但不是 0. 而且由于 $k>0$, 当 $w>0$ 时, $\Delta s>0$ 的 C 的部分弧在密切平面的正側(ξ_3 的正側), 而 $\Delta s<0$ 的 C 的部分弧則在其負側. 又当 $w<0$ 时,情况恰恰相反.

換句話說,如果曲綫 C 在点 $\mathbf{x}(s)$ 从密切平面的負側穿到它的正側, 那末 $w>0$; 相反, 如果从正側穿到負側, $w<0$. 这就是 w 的符号的几何学意义. 因此,只要在 $\mathbf{x}(s)$ 的邻域里把曲綫怎样穿过密切平面的情况看清楚之后, 适当地給予 $\Delta\phi$ 以符号, 就可写出

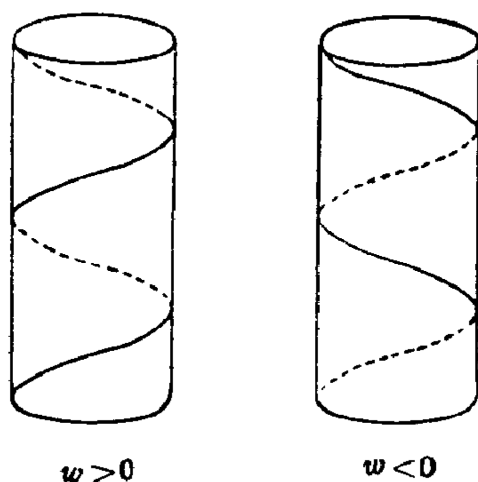


图 1·20

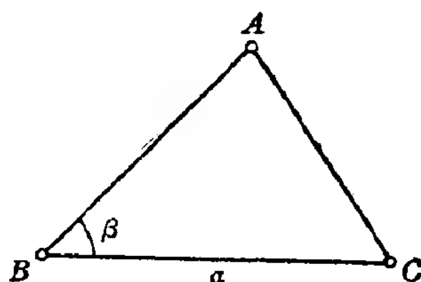


图 1·21

$$w=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\phi}{\Delta s}. \tag{1·51}$$

容易看出,常螺綫

$$x_1=a\cos t, \quad x_2=a\sin t, \quad x_3=a\tan\alpha\cdot t$$

的撓率是

$$w=\frac{\sin 2\alpha}{2a}.$$

图 1·20 中左右图分别表示 $\alpha>0$, $\alpha<0$ 的常螺綫. 葡萄藤是 $w>0$, 制造啤酒用的霍布藤是 $w<0$.

試把 $\triangle ABC$ 画在紙上. 假如量出边 BC 的长是 a, $\angle B$ 的大

小是 β. 数值 α 和 β 是这三角形的形状有关的重要的量. 但是,仅有了这些还不能确定三角形的形状. 根据初等几何的合同定理,知道了 $\angle C$ 的大小 γ 或者边 AB 的长 c,才能确定这三角形的形状. 所以 α, β, γ 或者 α, c, β 是完全特征化三角形的量.

我們对于曲綫 C 得到了曲率 $k(s)$ 和撓率 $w(s)$. 这些表达了 C 的显著的几何性质. 但是,仅仅依靠在 $0 \leqslant s \leqslant L$ 的这些函数究竟能不能够把曲綫 C 特征化呢? 还是这些只不过是象在三角形的例子里的数值 α, β 一样表达 C 的一部分性质呢? 或者相反地象 α, β, γ 一样是足以完全决定曲綫 C 的呢?

另外,在三角形的时候三边的长 a, b, c 的一組也可完全地特征化它的形状. 但是,在三边的长之間要有二边之和大于第三边的关系,倘使 a, b, c 完全随便的話,决不能看做三角形的三边的长.

給定了曲綫 C,就确定了曲率 $k(s)$ 和撓率 $w(s)$. 但是,象三角形三边的长 a, b, c 一样,其間有沒有什么关系呢? 任意給定了 $k(s)$, $w(s)$ 的时候,分别以这些为曲率和撓率的曲綫究竟存在不存在呢?

这些課題对曲綫論說来,不得不成为十分重要的課題. 我們将在第 2 章里給这些課題以解答. 但是,在这里仅仅提前叙述結果如下.

基本定理 I　仅仅用曲率 $k(s)$ 和撓率 $w(s)$ 便能够把空間曲綫完全地特征化起来. 就是,当长相等的两空間曲綫 C, $\bar{C}$ 上的点按照它們的始点量起而有相等弧长时,把这些点互相对应起来;如果在对应点常有相等的曲率和撓率,那末移动(而不变形) C, $\bar{C}$ 中的一方,可以使它重合另一方,从而 C, $\bar{C}$ 是互相合同的。

(光是局部的話,从 Bouquet 公式也可推出这定理.)

基本定理 II　在 $0 \leqslant s \leqslant L$ 任意給定 C' 級函数 $k(s)$ $(\geqslant 0)$ 和

連續函数 $w(s)$ 时，分别以这些函数为曲率和撓率的空間曲綫一定存在．(按照基本定理 I，凡是可把它移动使重合起来的曲綫都看做同一曲綫；那末，它只有一条．)

在微积分里平面曲綫的方程决定于 $y=f(x)$ 或者 $x=f(t)$，$y=g(t)$．即使对于同一条曲綫，这些方程同坐标系的选擇有关系；坐标系不同，方程也就不同．如果使用极坐标一类的东西，那就更不必說了．

与此相反，給定了 $k(s)$ $(\geqslant 0)$，$w(s)$ 时，所以能够唯一地确定曲綫，是由于 $k(s)$，$k(s)$ 具有几何学意义而同坐标系无关．因而，把

$$k=k(s), \quad w=w(s) \tag{1·52}$$

看作为曲綫的方程，既很自然，又是直截了当．所以习慣上称 (1·52) 为曲綫的**自然方程**．

以上所述的事項表明了，曲綫 C 的性質全部凝集于曲率 $k(s)$ 和撓率 $w(s)$ $(0\leqslant s\leqslant L)$ 之中．

【习題】

1．証明在一条曲綫上曲率到处是 0 的这种曲綫仅限于直綫．

2．証明在一条曲綫上撓率到处是 0 的这种曲綫仅限于平面曲綫．

3．用一般参数 t 作表示时，曲率、撓率的表达式分别如下：

$$k^2=\frac{(\dot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}})^2}{(\dot{\mathbf{x}}^2)^3},$$

$$w=\frac{|\dot{\mathbf{x}}\ \ddot{\mathbf{x}}\ \dddot{\mathbf{x}}|}{(\dot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}})^2}.$$

4．証明常螺綫 $x_1=a\cos t$，$x_2=a\sin t$，$x_3=bt$ (a,b 常数，$a>0$) 的曲率、撓率分别是

$$k=\frac{1}{a^2+b^2}, \quad w=\frac{b}{a^2+b^2}.$$

5．通过曲綫 C 上的点 $\mathbf{x}(s)$ 和它的其他三个相邻点引球面，称它为**曲率球**．証明：曲率球的中心决定于

$$\mathbf{x}(s)+\rho(s)\xi_2(s)+\sigma(s)\xi_3(s)\quad\left(\text{其中 }\sigma=\frac{\rho'}{w}\right),$$

它的半徑平方决定于

$$\rho^2+\frac{\rho'^2}{w^2}.$$

特别是証明:空間曲率 C 要变为球面曲綫的充要条件是

$$w\rho+\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{w}\frac{d\rho}{ds}\right)=0.$$

1·5 平面曲綫. Cesàro 方法

到前节为止，我們导出了作为空間曲綫論的基础的一些数量和公式，以下将叙述如何运用这些来解决具体的問題. 首先要从作为特殊情况的平面曲綫微分几何开始.

假設在平面上坐标軸是右手制，就是当 x_1 軸的正向朝反时針回轉方向旋轉 90° 时，便得到 x_2 軸的正向.

平面曲綫的方程可以表成

$$x_1=x_1(t),\quad x_2=x_2(t),\quad a\leqslant t\leqslant b,$$

或者用弧长表成

$$x_1=x_1(s),\quad x_2=x_2(s),\quad 0\leqslant s\leqslant L. \tag{1·53}$$

因为采用了弧长 s 做参数，

$$x_1'^2+x_2'^2=1,$$

$$\therefore\quad x_1'x_1''+x_2'x_2''=0,$$

就有

$$x_1'':x_2''=-x_2':x_1',$$

从而得到关系

$$x_1''=-kx_2',\quad x_2''=kx_1'. \tag{1·54}$$

可是

$$\begin{vmatrix}x_1' & x_2'\\ x_1'' & x_2''\end{vmatrix}=k(x_1'^2+x_2'^2)=k, \tag{1·55}$$

所以按照 $k>0$ 或 $k<0$, 向量 (x_1'', x_2'') 是从 (x_1', x_2') 朝时針的反向或順向回轉一个直角之后得来的. 因此,按照 $k>0$ 或 $k<0$, 曲綫在点 s 的邻域从面朝着在 s 的切綫正向的一个观察者看来，是在左側或在右側出現的. 如果用

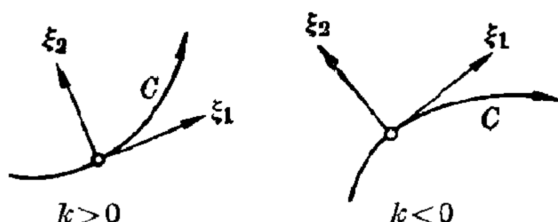


图 1·22

$\xi_1(s)$, $\xi_2(s)$ 分别表示在点 $\mathbf{x}(s)$ 具有支量 (x_1', x_2'), $(-x_2', x_1')$ 的向量,就称 $\mathbf{x}(s)\xi_1\xi_2$ 这个标形为 Frenet 标形. 从(1·54)式得到

$$\mathbf{x}'=\xi_1,$$

$$\xi_1'=k\xi_2.$$

另一方面,

$$\xi_2'=a\xi_1+b\xi_2.$$

利用

$$\xi_1^2=1,\quad \xi_1\xi_2=0,\quad \xi_2^2=1,$$

便容易导出

$$\xi_2'=-k\xi_1.$$

我們称

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{x}' &= \xi_1,\\ \xi_1' &= \qquad k\xi_2,\\ \xi_2' &= -k\xi_1\end{aligned}\right\}\tag{1·56}$$

为平面曲綫的 Frenet 公式.

为了給出 $k(s)$ 的几何学意义，考察 $\xi_1(s)$, $\xi_1(s+\Delta s)$ 所成的角. 在所論的平面上,按照順时針方向或反时針方向把 $\xi_1(s)$ 回轉一个微小角使与 $\xi_1(s+\Delta s)$ 平行而分别給所成的角以負号或正号; 設 $\Delta\theta$ 是这样得出的微小角,很明显地成立

$$k(s)=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta s}=\frac{d\theta}{ds}.\tag{1·57}$$

在平面曲綫的情况下，当函数 $k(s)$ $(0\leqslant s\leqslant L)$ 預先給定时，从下面所述得知，以这函数为曲率的曲綫一定存在。

先假定已經找到了所要的曲綫，設切綫 $\xi_1(s)$，$\xi_1(s+\Delta s)$ 和固定坐标軸所成的角是 θ，$\theta+\Delta\theta$，那末(1·57)式成立。因而，

$$\theta=\int^s k(s)\,ds, \tag{1·58}$$

其中假定对这不定积分中的积分常数适当加以决定。可是，

$$x_1'=\cos\theta,\quad x_2'=\sin\theta,$$

用上面求得的 $\theta(s)$ 到这里来，便有

$$x_1=\int_0^s\cos\theta(s)\,ds,\quad x_2=\int_0^s\sin\theta(s)\,ds. \tag{1·59}$$

預先給定了 $k(s)$，容易看出：由(1·58)，(1·59)定义的 $(x_1(s),x_2(s))$ 是以这函数 $k(s)$ 为曲率的曲綫。

灵活运用活动标形的机构来解决許多几何問題，并指出了还有向新发展的可能性的，是 Cesàro。下面將說明 Cesàro 方法。

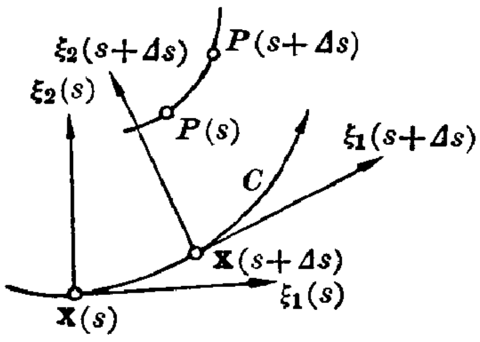


图 1·23

首先对于曲綫 C 的各点 $\mathbf{x}(s)$ 取同平面上的点 $P(s)$ 和它对应。跟着 $\mathbf{x}(s)$ 在 C 上的移动，点 $P(s)$ 一般也要动。称这样的曲綫 $P(s)$ 为 C 的**伴随曲綫**。我們考察伴随曲綫也是可微分的曲綫的情况。为了要表达点 $P(s)$ 的位置，选取 $P(s)$ 关于点 $\mathbf{x}(s)$ 有关的标形的坐标 $u_1(s)$，$u_2(s)$，就是

$$P(s)=\mathbf{x}(s)+u_1(s)\xi_1(s)+u_2(s)\xi_2(s).$$

称其中的 $(u_1(s),\ u_2(s))$ 为点 $P(s)$ 关于曲綫 C 上的点 $\mathbf{x}(s)$ 的**相对坐标**。另一方面，称 $P(s)$ 关于固定标形的坐标 $p_i(s)$ 为 $P(s)$ 的**絕对坐标**。由于

$$P(s+\varDelta s)=\mathbf{x}(s+\varDelta s)+u_1(s+\varDelta s)\xi_1(s+\varDelta s)$$
$$+u_2(s+\varDelta s)\xi_2(s+\varDelta s),$$

从这式减去前式的时候,虽然 $(u_1(s), u_2(s))$ 与 $(u_1(s+\varDelta s), u_2(s+\varDelta s))$ 并不是关于同一标形的点坐标，但很明显地成立同普通一样的微分法則,即

$$dP=d\mathbf{x}+du_1\xi_1+u_1d\xi_1+du_2\xi_2+u_2d\xi_2.$$

可是改写它为下列形式:

$$P'=\mathbf{x}'+u_1'\xi_1+u_1\xi_1'+u_2'\xi_2+u_2\xi_2',$$

以 Frenet 公式(1·56)代到这里,就成立

$$P'=(u_1'-ku_2+1)\xi_1+(u_2'+ku_1)\xi_2.$$

如果置

$$\left.\begin{aligned}\frac{\delta u_1}{ds}&=u_1'-ku_2+1,\\ \frac{\delta u_2}{ds}&=u_2'+ku_1,\end{aligned}\right\}\tag{1·60}$$

終于得到

$$P'=\frac{\delta u_1}{ds}\xi_1+\frac{\delta u_2}{ds}\xi_2.\tag{1·61}$$

当曲綫关于一个坐标系为 $(u_1(s), u_2(s))$ 所表达时,把 s 看成时間而给以点的运动，我們知道它的速度决定于 $\left(\frac{du_1}{ds}, \frac{du_2}{ds}\right)$. 可是很不凑巧地用了活动坐标，在各瞬間坐标系在变化，所以 $\left(\frac{du_1}{ds}, \frac{du_2}{ds}\right)$ 并不表达点 P 的速度. 但是 (1·61) 却表达了, $\left(\frac{\delta u_1}{ds}, \frac{\delta u_2}{ds}\right)$ 恰恰是点 P 的速度向量关于 Frenet 标形 $\mathbf{x}\,\xi_1\xi_2$ 的支量. 換句話說, $\left(\frac{du_1}{ds}, \frac{du_2}{ds}\right)$ 表示从标形 $\mathbf{x}\xi_1\xi_2$ 所看到的点 P 的外表速度，而 $\left(\frac{\delta u_1}{ds}, \frac{\delta u_2}{ds}\right)$ 則表示从同一标形所看到的点 P

的眞正速度．至于(1·60)式，表达了这些外表速度与眞正速度的关系．

現在特別考察这样的情况：在曲綫 C 的各点 $\mathbf{x}(s)$ 的对应点 P 是所論平面上的定点．这时因为标形本身在动，$u_1(s)$，$u_2(s)$ 一般应該是 s 的函数．为了 P 变为定点的条件，它的眞正速度是 0，就是說，

$$\left.\begin{aligned} u_1' &= ku_2 - 1, \\ u_2' &= -ku_1. \end{aligned}\right\} \tag{1·62}$$

称此式为 **Cesàro 不动条件**．这是靜止点的相对坐标应該滿足的微分方程．

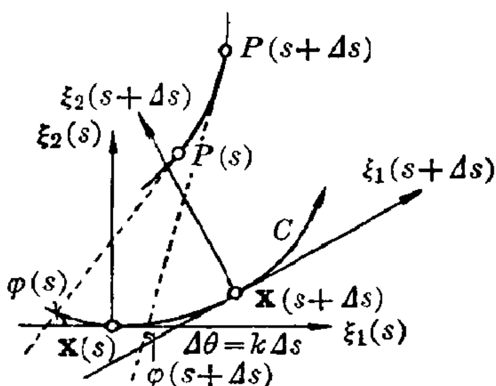


图 1·24

設点 P 画成曲綫 Γ，試求 Γ 在其点 $P(s)$ 的曲率．

設 Γ 在点 $P(s)$ 的切綫与 $\xi_1(s)$ 做成的角是 $\varphi(s)$，Γ 的弧长是 $\sigma(s)$．假如 $\varphi(s)$ 是 Γ 的切綫与定直綫所成的角的話，$\dfrac{d\varphi}{d\sigma}=\dfrac{d\varphi}{ds}\Big/\dfrac{d\sigma}{ds}$ 应当是所求的 Γ 的曲率．很不凑巧，$\varphi(s)$ 是动直綫 $\xi_1(s)$ 与 Γ 的切綫所成的角．所以 $\dfrac{d\varphi}{ds}$ 是 Γ 的切綫的旋轉角的外表变化率．这样一来，設 Γ 的切綫旋轉角的眞正变化率为 $\dfrac{\delta\varphi}{ds}$，而且 Γ 的弧长的眞正变化率为 $\dfrac{\delta\sigma}{ds}$，我們必須求出 $\dfrac{\delta\varphi}{ds}\Big/\dfrac{\delta\sigma}{ds}$．可是容易知道

$$\tan\varphi(s)=\frac{B}{A}, \tag{1·63}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} A &= u_1' - ku_2 + 1, \\ B &= u_2' + ku_1. \end{aligned}\right\} \tag{1·64}$$

同样，Γ 在 $P(s+\Delta s)$ 的切綫与 $\xi_1(s+\Delta s)$ 所成的角 $\varphi(s+\Delta s)$ 决定于

$$\tan\varphi(s+\Delta s)=\frac{B(s+\Delta s)}{A(s+\Delta s)}.$$

从这两式得出

$$\varphi'\sec^2\varphi=\frac{B'A-A'B}{A^2},$$

从而

$$\varphi'=\frac{AB'-BA'}{A^2+B^2}.$$

另一方面，容易看出在 $P(s+\Delta s)$ 的切綫与 $\xi_1(s)$ 所成的角是 $\varphi(s+\Delta s)+k\Delta s$，因此眞正的角的变化率 φ' 决定于

$$\frac{\delta\varphi}{ds}=\varphi'+k. \tag{1·65}$$

这样，便得到

$$\frac{\delta\varphi}{ds}=k+\frac{AB'-BA'}{A^2+B^2}. \tag{1·66}$$

此外，Γ 的弧长是

$$\sigma=\int_0^s\sqrt{(P')^2}\,ds, \tag{1·67}$$

且从而

$$\frac{\delta\sigma}{ds}=\sqrt{(P')^2}.$$

把(1·61)代到这里，就有

$$\frac{\delta\sigma}{ds}=\sqrt{A^2+B^2}. \tag{1·68}$$

所以 Γ 的曲率 $\varkappa$ 决定于

$$\varkappa=\frac{\delta\varphi}{ds}\Big/\frac{\delta\sigma}{ds}=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}\left(k+\frac{AB'-BA'}{A^2+B^2}\right). \tag{1·69}$$

要直观地理解 Cesàro 的思想方法，可用下面的一个比喻．把曲綫 C 看作为弯曲的小河．小船沿着这条小河前进，船首沿河流而向着下游．艄公在船上观察外界，是参考于同自己一起移动着的坐标轴来进行的．第一轴是从船尾向着船首的直綫，而第二轴则是同它垂直而向着左舷的．从外界的外表变化与现实变化的差异，艄公可以得出关于小河弯曲度的緩急，以及其他有关小河的种种知識．这就是 Cesàro 曾經用过的比喻．

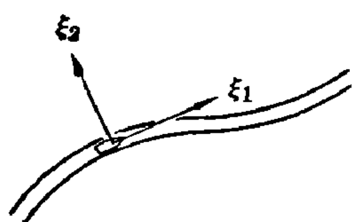


图　1·25

例题　求这样的曲綫 C，使其上的点 $\mathbf{x}$ 与 C 在 $\mathbf{x}$ 的曲率中心 K 的連結綫段 $\mathbf{x}K$ 常被一定直綫所平分．

【解】　关于在点 $\mathbf{x}(s)$ 的标形写出綫段 $\overline{\mathbf{x}(s)K(s)}$ 的中点的相对坐标：$\left(0,\ \frac{\rho}{2}\right)$．这点要画一条定直綫，而且因为这就相当于 Γ，只要把它的曲率 $\varkappa$ 是 0 这个条件检查一下就够了．

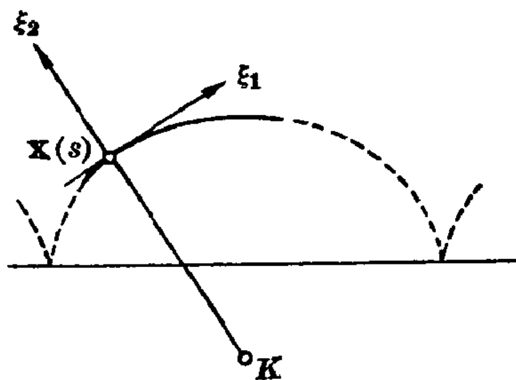


图　1·26

首先明显地

$$A=\frac{1}{2},\ B=\frac{1}{2}\frac{d\rho}{ds},\quad (1\cdot 70)$$

从 $(1\cdot 65)$ 便看出充要条件是：所求的曲綫 C 满足 $k+\frac{d\varphi}{ds}=0$，就是

$$k+\frac{d\tan^{-1}\frac{B}{A}}{ds}=0.$$

因为

$$k=\frac{d\theta}{ds}\left(=\frac{1}{\rho}\right),$$

可以改写上面的方程为

$$d \tan^{-1} \frac{B}{A} + d\theta = 0,$$

$$\therefore \quad \frac{B}{A} = -\tan(\theta + b)$$

(b: 积分常数). 可是从 (1·70) 看出

$$\frac{B}{A} = \frac{d\rho}{ds},$$

注意到 $ds = \rho\, d\theta$, 所以得到

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\tan(\theta + b)\, d\theta,$$

$$\therefore \quad \rho = a \cos(\theta + b) \tag{1·71}$$

(a: 积分常数). 这样一来,

$$ds = \rho\, d\theta = a \cos(\theta + b)\, d\theta,$$

因此

$$s = a \sin(\theta + b) + c \tag{1·72}$$

(c: 积分常数). 由于量弧长时的始点在 C 上可任意选擇, 置 $c = 0$ 也不要紧. 这样, 从 (1·71), (1·72) 成立

$$s^2 + \rho^2 = a^2.$$

这方程是曲綫 C 的自然方程. 如所知, 具有这样自然方程的曲綫称为摆綫(下面习题 2).

在摆綫的頂点 $\rho = 0$, 所以定直綫是通过摆綫的頂点, 从而是所論摆綫的基綫.

【习题】

1. 証明具有自然方程

$$\rho = as + b$$

(a, b 常数) 的曲綫是对数螺綫.

2. 当半徑 a 的圓在一定直綫上无滑走地轉动时, 这圓上的定点的軌迹称为摆綫. 它的方程是

$$x = a\theta - a \sin\theta, \quad y = a - a \cos\theta.$$

証明在擺綫上取 $\theta=\pi$ 的对应点作为量弧长的起点 $s=0$ 时，

$$\rho^2=16a^2\sin^2\frac{\theta}{2},$$

$$s=-4a\cos\frac{\theta}{2},$$

从而成立

$$\rho^2+s^2=16a^2. \quad (1\cdot73)$$

(1·73)式是擺綫的自然方程。

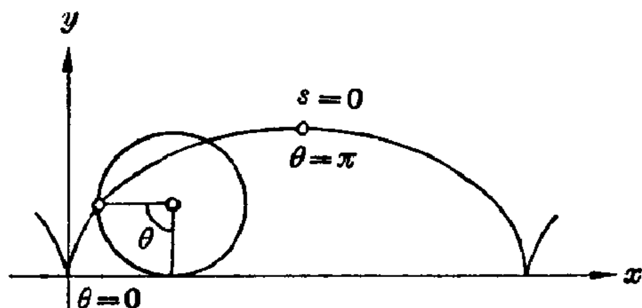


图 1·27

3．平面曲綫 C 在其上一点 $\mathbf{x}(s)$ 的曲率中心 $K(s)$ 画成的曲綫，称为 C 的漸屈綫。証明漸屈綫的曲率是 $\left(\rho\left|\frac{d\rho}{ds}\right|\right)^{-1}$，式中 ρ 表示 C 的曲率半徑。

1·6 輪轉曲綫

一个动圓 C_0 在另一定圓 C 上无滑走地轉动时，固定于 C_0 的一点所画的軌迹按照其所在的位置是外擺綫或內擺綫。这个事实想必是讀者学过的。現在，将稍許一般地考察这样的軌迹。

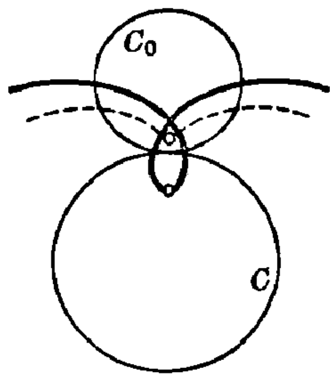


图 1·28

在同一平面上曲綫 C 是固定着的，而曲綫 C_0 則和它本身相合同而动。选取曲綫各自的弧长 s 为参数来作表示。假如把弧长 s 看做时間的話，在各时間 s，C_0 上的点 $\mathbf{x}_0(s)$ 与 C 上的同参数的点 $\mathbf{x}(s)$ 重合，而且当 C_0 連續地运动直到 $\mathbf{x}_0(s)$，$\mathbf{x}(s)$ 的切綫一致为止时，我們說：曲綫 C_0 在 C 上无滑走地轉动，C 是**底曲綫**，C_0 是**轉曲綫**。

在 C_0 沿 C 上无滑走地轉动的各瞬間里，C_0，C 在切点的 Frenet 标形完全重合。

設点 P 是固定于 C_0 的，而且当 C_0 在 C 上无滑走地轉动时，

P 跟随它而运动．这时，称 P 所画的曲綫 Γ 为**輪轉曲綫**。

在固定的紙面上画上曲綫 C，在另一張透明紙面上画上曲綫 C_0，把第二張重合在第一張上，使 C_0 同 C 相切并且不要滑走而轉动第二張紙面；这样，第二張紙面上的各点所画的軌迹就是輪轉曲綫．下面来研究輪轉曲綫的性质．

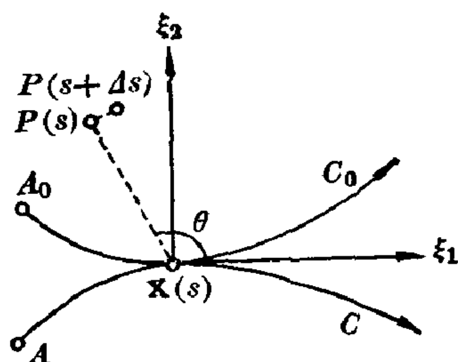


图 1·29

首先因为 P 关于 C_0 是静止的，如果 $(u_1(s), u_2(s))$ 是 P 关于 C_0 与 C 在切点 $\mathbf{x}_0(s)$ 的 Frenet 标形的相对坐标，从 (1·62) 成立不动条件

$$\frac{du_1}{ds}=k_0u_2-1,\quad \frac{du_2}{ds}=-k_0u_1, \tag{1·74}$$

式中 $k_0(s)$ 表示 C_0 的曲率．

可是在同一瞬間，P 关于 C 的相对坐标也是 $(u_1(s), u_2(s))$（因为在 $\mathbf{x}_0(s)$ 与 $\mathbf{x}(s)$ 的标形是重合一致的），并且点 P 的眞正变化率 $\left(\frac{\delta u_1}{ds}, \frac{\delta u_2}{ds}\right)$ 明显地决定于

$$\left.\begin{aligned}\frac{\delta u_1}{ds}&=u_1'-ku_2+1,\\ \frac{\delta u_2}{ds}&=u_2'+ku_1.\end{aligned}\right\} \tag{1·75}$$

从 (1·74)，(1·75) 得出

$$\frac{\delta u_1}{ds}=(k_0-k)u_2,\quad \frac{\delta u_2}{ds}=-(k_0-k)u_1. \tag{1·76}$$

因此，

$$\frac{\delta u_2}{\delta u_1}=-\frac{u_1}{u_2}.$$

这式表明，Γ 在点 $P(s)$ 的切綫垂直于直綫 $\mathbf{x}(s)P(s)$，就是

$\mathbf{x}P$ 是 Γ 的法綫。所以点 $P(s)$ 在这一瞬間里可以看作受到以点 $\mathbf{x}(s)$ 为中心的旋轉运动。

曲綫 Γ 的弧长 σ 决定于

$$\begin{aligned}\sigma &= \int_0^s \sqrt{(P')^2}\, ds \\ &= \int_0^s \sqrt{\left(\frac{\delta u_1}{ds}\right)^2 + \left(\frac{\delta u_2}{ds}\right)^2}\, ds \\ &= \int_0^s |k_0 - k| \sqrt{u_1^2 + u_2^2}\, ds. \qquad (1\cdot77)\end{aligned}$$

从而

$$\frac{\delta\sigma}{ds} = |k_0 - k| \sqrt{u_1^2 + u_2^2}. \qquad (1\cdot78)$$

把 $A = (k_0 - k)u_2$, $B = -(k_0 - k)u_1$ 代入 (1·69) 式来求 Γ 的曲率 k^*, 容易看出它决定于

$$k^* = \frac{1}{|k_0 - k| \sqrt{u_1^2 + u_2^2}} \left(\frac{-u_1' u_2 + u_1 u_2'}{u_1^2 + u_2^2} + k \right).$$

又从(1·74)式代入,便得到

$$k^* = \frac{1}{|k_0 - k| \sqrt{u_1^2 + u_2^2}} \left(k - k_0 + \frac{u_2}{u_1^2 + u_2^2} \right). \qquad (1\cdot79)$$

設 $\mathbf{x}P$ 与 $\xi_1(s)$ 所成的角是 θ, 綫段 $\mathbf{x}(s)P(s)$ 的长是 r; 由于

$$\frac{u_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} = \sin\theta,$$

$$u_1^2 + u_2^2 = r^2,$$

置 $\varepsilon = \operatorname{sgn}(k - k_0)$, 就得到公式

$$k^* = \frac{\varepsilon}{r} + \frac{\varepsilon \sin\theta}{(k - k_0) r^2}.$$

容易改写它,

$$\frac{1}{\varepsilon\rho^* - r} + \frac{1}{r} = \left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho} \right) \frac{1}{\sin\theta}. \qquad (1\cdot80)$$

称它为 Euler-Savary **公式**。

現在,試述 Euler-Savary 公式的一个应用. 当輪轉曲綫上的点 P 是拐点时,由于曲率 k^* 等于 0,

$$r=R\sin\theta,$$

式中

$$\frac{1}{R}=k_0-k.$$

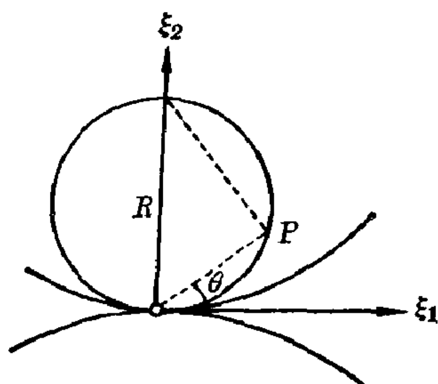


图 1·30

这表明了，在瞬間 s 里，凡使固定于 C_0 的点所画的輪轉曲綫具有拐点的这种点 P 的軌迹，是在点 $\mathbf{x}(s)$ 中心 $\mathbf{x}(s)+\frac{R}{2}\xi_2$ 和直徑 R 的圓. 称这圓为在瞬間 s 的**拐点圓.**

現在考察这样情况: 把曲綫 C_0 在曲綫 C 上无滑走地轉动,固定于 C_0 的曲綫 Γ_0 与固定于 C 的曲綫 Γ 常相切而轉动. 这时, Γ_0, Γ 可以看作为分别是两曲綫在各瞬間的切点画成的伴随曲綫.

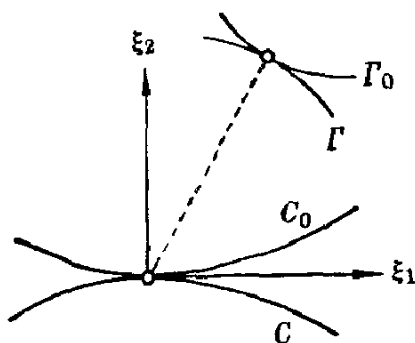


图 1·31

对于曲綫 C_0 和 C 的 Frenet 标形在每一瞬間 s 总是一致的. 所以伴随曲綫 Γ_0 关于 C_0 的相对坐标 $(u_1(s), u_2(s))$ 完全重合于 Γ 关于 C 的相对坐标. Γ_0, Γ 的切点的眞正变化率决定于

$$\left.\begin{aligned}\frac{\delta_0 u_1}{ds}&=u_1'-k_0u_2+1,\\ \frac{\delta_0 u_2}{ds}&=u_2'+k_0u_1\end{aligned}\right\}\tag{1·81}$$

和

$$\left.\begin{aligned}\frac{\delta u_1}{ds}&=u_1'-ku_2+1,\\ \frac{\delta u_2}{ds}&=u_2'+ku_1.\end{aligned}\right\}\tag{1·82}$$

从而 Γ_0, Γ 相切的条件决定于

$$\frac{\delta_0 u_1}{ds}:\frac{\delta_0 u_2}{ds}=\frac{\delta u_1}{ds}:\frac{\delta u_2}{ds}. \tag{1·83}$$

由(1·81), (1·82)代入这里,便有

$$u_1(u_1'+1)+u_2u_2'=0. \tag{1·84}$$

反过来,如果这条件成立,那末 Γ_0, Γ 常相切。

从(1·83)式还容易导出

$$\frac{\delta u_1}{ds}:\frac{\delta u_2}{ds}=-u_2:u_1.$$

此关系表明, Γ_0 和 Γ 在切点的共同切綫垂直于 C_0, C 的切点与 Γ_0, Γ 的切点的連綫.

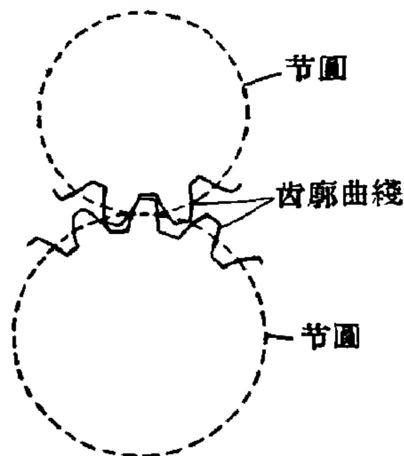


图 1·32

两曲綫 C_0, C 都是圆的特殊情况,在齿輪的理論里是重要的. 这是因为,齿輪的齿廓曲綫有一条叫节圆的固定曲綫(是个圆),两齿輪互相嚙合而回轉;这些节圆中的一个在其他一个上无滑走地轉动时,固定于这些节圆的曲綫常是保持相切的状态. 所以(1·83)式在齿輪方面相当于通称齿廓曲綫的嚙合方程. 这样,活动标形的理論在齿輪研究中也成为重要的方法.

【习题】 对平面曲綫 C 的切綫从所在平面上的一个定点 P 引垂綫, 垂足的軌迹称为 P 关于 C 的**垂足曲綫**. 把 C 在一直綫上无滑走地轉动时, 証明(Steiner 定理): P 所画的曲綫的弧长等于 P 关于 C 的垂足曲綫的弧长.

1·7 定斜曲綫

重新回到空間曲綫, 要把关于其性质的一两个定理作为例子来叙述.

当曲綫 C 上各点的切綫常与定方向做成一定的角度时, 称这

样的曲綫为**一般螺綫**或**定斜曲綫**. 平面曲綫、常螺綫是其特例.

定斜曲綫的切綫象是圓.

設定方向的单位向量是 e,定角是 θ,那末

$$\xi_1 \mathbf{e} = \cos\theta, \tag{1·85}$$

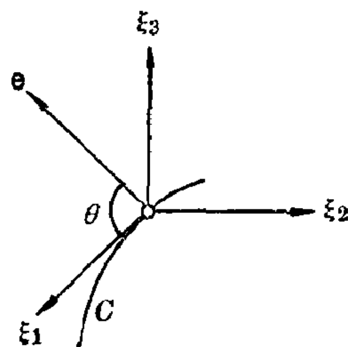


图 1·33

从而

$$\xi_1' \mathbf{e} = 0.$$

因此,由 Frenet 公式代入这里,

$$\xi_2 \mathbf{e} = 0. \tag{1·86}$$

所以向量 e 落在 ξ_1, ξ_3 所定的平面里. 这样, 便可写下

$$\xi_3 \mathbf{e} = \sin\theta.$$

把(1·86)导微,并应用 Frenet 公式,

$$-k\cos\theta + w\sin\theta = 0,$$

从而

$$\frac{k}{w} = \tan\theta. \tag{1·87}$$

就是說,定斜曲綫的曲率与撓率的比値在它的各点是一定的.

反过来,当(1·87)成立时,就有

$$\frac{d}{ds}(\xi_1\cos\theta + \xi_3\sin\theta) = 0.$$

所以 $\xi_1\cos\theta + \xi_3\sin\theta$ 是一定的单位向量. 写它做 e, 那末

$$\mathbf{e}\xi_1 = \cos\theta,$$

因而所論的曲綫是定斜曲綫.

定理 为了曲綫 C 成为定斜曲綫的充要条件是, 它的曲率与撓率的比値在它的各点是一定的.

常螺綫是定斜曲綫. 但是,此外还有其他定斜曲綫.

同平面曲綫的时候一样, Cesàro 方法对空間曲綫的研究也是强有力的方法.

在給定曲綫 C 的各点 $\mathbf{x}(s)$ 取一点 $P(s)$ 使与它对应时，跟着点 $\mathbf{x}$ 在 C 上的变动，$P(s)$ 一般也画成曲綫，这就是伴随曲綫．設点 $P(s)$ 关于 C 在 $\mathbf{x}(s)$ 的 Frenet 标形的相对坐标是 $u_1(s)$，$u_2(s)$，$u_3(s)$，那末就有

$$P(s)=\mathbf{x}(s)+\sum u_i(s)\xi_i(s).$$

应用 Frenet 公式，便容易看出

$$P'=\frac{\delta u_1}{ds}\xi_1+\frac{\delta u_2}{ds}\xi_2+\frac{\delta u_3}{ds}\xi_3, \tag{1·88}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}\frac{\delta u_1}{ds}&=u_1' - ku_2 + 1,\\ \frac{\delta u_2}{ds}&=u_2'+ku_1 - wu_3,\\ \frac{\delta u_3}{ds}&=u_3' + wu_2.\end{aligned}\right\} \tag{1·89}$$

这里 u_i' 表示外表变化率，$\dfrac{\delta u_i}{ds}$ 表示眞正变化率．特别是，点的不动条件决定于

$$\left.\begin{aligned}u_1'&= ku_2 - 1,\\ u_2'&=-ku_1 + wu_3,\\ u_3'&= - wu_2.\end{aligned}\right\} \tag{1·90}$$

另外，伴随曲綫的弧長 σ 决定于

$$\sigma=\int^s\sqrt{\sum\left(\frac{\delta u_i}{ds}\right)^2}\,ds. \tag{1·91}$$

在曲綫 C 的各点 $\mathbf{x}$ 我們用了点 P 作为伴随点，并考察了这点跟点 $\mathbf{x}$ 的变动而画成的伴随曲綫，但是，也可用如直綫、平面等种种图形来代替点 P．例如，伴随的是向量 α，設它关于各点 $\mathbf{x}(s)$ 的 Frenet 标形的相对坐标是 $\alpha_1(s)$，$\alpha_2(s)$，$\alpha_3(s)$，那末

$$\alpha(s)=\sum\alpha_i(s)\xi_i(s).$$

把它导微且用 Frenet 公式，便容易看出

$$\alpha' = \sum \frac{\delta \alpha_i}{ds} \xi_i, \tag{1·92}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} \frac{\delta\alpha_1}{ds} &= \alpha_1' - k\alpha_2, \\ \frac{\delta\alpha_2}{ds} &= \alpha_2' + k\alpha_1 - w\alpha_3, \\ \frac{\delta\alpha_3}{ds} &= \alpha_3' + w\alpha_2. \end{aligned}\right\} \tag{1·93}$$

不动条件卽 $\alpha(s)$ 的长和方向都不变的条件是

$$\alpha_1' = k\alpha_2, \quad \alpha_2' = -k\alpha_1 + w\alpha_3, \quad \alpha_3' = -w\alpha_2. \tag{1·94}$$

Cesàro 的思想方法在空間曲綫的情况下，可用下面的比喻来作直观的理解。

把空間曲綫 C 看做象魚鱗一样的小曲面片所綴成的一条細带；每一曲面片与各点 $\mathbf{x}(s)$ 的密切平面相切，而且是以 $\mathbf{x}(s)$ 为中心的。一只甲虫爬上这条带子而观望空間的几何学风景。甲虫是关于同它本身一起动的直交軸进行观望的。其中第一軸朝着甲虫的从尾到首的直綫，第二軸与带相切而向着左側，第三軸則通过甲虫背上向着上方。甲虫从外界的外表变化与眞实变化的比較可以了解到自己所爬行的带的弯曲情况、扭撓情况等等几何学事实。

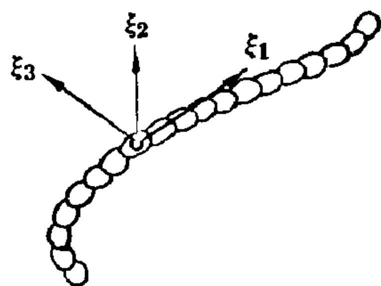


图 1·34

我們知道，常螺綫的曲率和撓率都是常数。下面作为 Cesàro 的思想方法的应用来証明这个事实的逆也是眞的。

定理 曲率和撓率都是一定的空間曲綫，一定是常螺綫。

証明 向量关于所論空間曲綫 C 的不动条件决定于 (1·94)。現在，置

$$\beta_1=\frac{k\alpha_1-w\alpha_3}{\sqrt{k^2+w^2}},\quad \beta_2=\alpha_2,\quad \beta_3=\frac{w\alpha_1+k\alpha_3}{\sqrt{k^2+w^2}}.$$

因为 k, w 是常数,(1·94) 可以写成

$$\beta_1'=\beta_2\sqrt{k^2+w^2},\quad \beta_2'=-\beta_1\sqrt{k^2+w^2},\quad \beta_3'=0.$$

β_1 和 β_2 都是微分方程

$$\beta''+\lambda^2\beta=0,\quad \lambda^2=k^2+w^2$$

的解。上式是容易积分的,从此看出

$$\beta_1=c_1\cos\lambda s+c_2\sin\lambda s,$$

$$\beta_2=-c_1\sin\lambda s+c_2\cos\lambda s,$$

$$\beta_3=c_3,$$

式中 c_1, c_2, c_3 是积分常数。

特别选取 $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ 作为积分常数,便得到三个向量

$$\mathbf{e}_1:\quad (\cos\lambda s,\ -\sin\lambda s,\ 0),$$

$$\mathbf{e}_2:\quad (\sin\lambda s,\ \cos\lambda s,\ 0),$$

$$\mathbf{e}_3:\quad (0,\ 0,\ 1).$$

$\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ 中任何一个对于 C 的静止点 $\mathbf{x}(s)$ 的变动总是平行,而且长也相等;置

$$\cos\theta=\frac{k}{\sqrt{k^2+w^2}},\quad \sin\theta=\frac{w}{\sqrt{k^2+w^2}},$$

这三个向量关于 Frenet 标形的相对支量分别是

$$\mathbf{e}_1:\quad (\cos\lambda s\cos\theta,\ -\sin\lambda s,\ -\cos\lambda s\sin\theta),$$

$$\mathbf{e}_2:\quad (\sin\lambda s\cos\theta,\ -\cos\lambda s,\ -\sin\lambda s\sin\theta),$$

$$\mathbf{e}_3:\quad (\sin\theta,\ 0,\ \cos\theta).$$

由于这些是互相直交的单位向量,考察这样的絕对坐标,使所参考的直交坐标系的三軸和上列三向量平行。

可是,上列三向量的第一支量不外乎是它們在曲綫 C 的切綫

向量 $\xi_1(s)$ 上的正射影，所以

$$(\mathbf{e}_1\xi_1)=\cos\lambda s\cos\theta,$$
$$(\mathbf{e}_2\xi_1)=\sin\lambda s\cos\theta,$$
$$(\mathbf{e}_3\xi_1)=\sin\theta.$$

因为 $\xi_1=\mathbf{x}'$，把这些方程积分起来，就得到

$$x_1(s)=\frac{\sin\lambda s\cos\theta}{\lambda},\quad x_2(s)=-\frac{\cos\lambda s\cos\theta}{\lambda},$$
$$x_3(s)=s\sin\theta.$$

积分常数虽然一度出現，但是无論怎样选取它們，只不过是給出了平行移动所导出的曲綫，可不必考虑。

从上式得到

$$x_1^2+x_2^2=\frac{\cos^2\theta}{\lambda^2},$$

从而曲綫 C 在正圓柱上。由于 $\mathbf{e}_3$ 是平行于柱軸，而且 $(\mathbf{e}_3\xi_1)=\sin\theta$，我們看出所論的曲綫 C 是这正圓柱上的定斜曲綫，就是常螺綫。

【习题】

1. 設一撇表示关于弧长 s 的微商，証明 $|x''\ x'''\ x''''|=0$ 是定斜曲綫的充要条件。

2. 証明 $x_1=\cosh t$，$x_2=\sinh t$，$x_3=at$ 是定斜曲綫。

3. 在空間曲綫 C 上一点 $\mathbf{x}(s)$ 的切綫取一点 P，可以写成 $P=\mathbf{x}(s)+u\xi_1(s)$，如果 u 是 s 的函数，P 画成曲綫 Γ。当 Γ 的切綫常和通过其切点的 C 的切綫垂直时，称 Γ 为 C 的**漸伸綫**，而称 C 为 Γ 的**漸屈綫**。

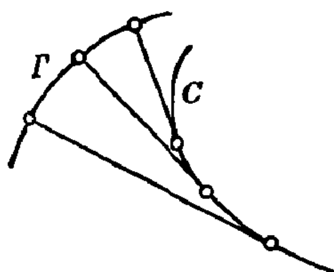


图 1·35

圓以外的平面曲綫在这平面上具有微积分意义下的漸屈綫。但是，不在这平面上的漸屈綫还有无穷多，而且这些都是在平面漸屈綫上各点所引这平面的垂綫画成的柱面上，每条都是定斜曲綫。試証明之。

4. 給定曲綫 C 的时候，如果能找出适当的曲綫 C^*，使 C 与 C^* 的点間有

一对一的对应，而且在对应点的主法綫一致，那末称給定曲綫 C 为 **Bertrand 曲綫**. 平面曲綫都是这类曲綫，但是不是这种平凡的 Bertrand 曲綫要滿足的充要条件是：它的曲率与撓率之間成立关系式 $ak+bw=1$ (a, b 常数).

5. 在前題里如果 C 是 Bertrand 曲綫，C^* 也是 Bertrand 曲綫，称它們为 **Bertrand 曲綫偶**.

(i) 設 C, C^* 上的对应点是 P, P^*; 又 C, C^* 在 P, P^* 的曲率中心分別是 M, M^*, 交比 (PP^*, MM^*) 是正常数.

(ii) C, C^* 在对应点的撓率的积是正常数.

1·8 四頂点定理

我們到前节为止叙述过的內容是关于曲綫上各点邻域的性质即**局部的性质**. 与此相反，在初等几何和解析几何里我們討論的是关于三角形、圓、橢圓等图形的整体的性质.

所謂局部的性质可以說是进入微分几何之后才发生的新概念. 但是討論局部的性质的同时，象初等几何一样探究整体的性质，当然是重要的事情. 可是不光是在这样的意义上，还有探討**同局部的性质相关联的整体性质**这样一个研究角度.

例如，平面曲綫 C 是由

$$x_1=x_1(t), \quad x_2=x_2(t), \quad a\leqslant t\leqslant b$$

表达的. 当 $\mathbf{x}(a)$, $\mathbf{x}(b)$ 的两点一致时，称这曲綫为**閉曲綫**，又只在 t_1, t_2 分別取值 a, b 的时候，$\mathbf{x}(t_1)=\mathbf{x}(t_2)$ 才能成立的閉曲綫，称为**单純閉曲綫**. 在閉曲綫可以把 $x_1(t)$, $x_2(t)$ 看成在 $-\infty<t<\infty$ 定义的周期 $b-a$ 的周期函数. 平面单純閉曲綫 C 把平面分成两个領域(內部与外部). 这事实是关于单純閉曲綫的整体性质，而是被称为 Jordan 定理的一个有名定理.

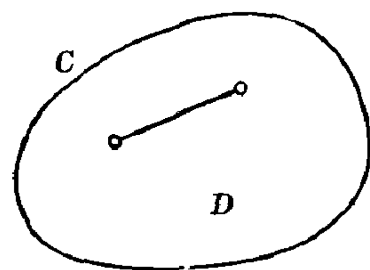


图 1·36

但是这并不属于微分几何的定理. 对单純閉曲綫 C 的內部和

C 上的点的集合用 D 表示时，如果 D 上任意两点的連結綫段全部由 D 的点所构成，那末称 C 为**凸閉曲綫**或者**卵形綫**.

現在考察 C^3 級的卵形綫，用弧长 s 表为

$$x_1=x_1(s),\quad x_2=x_2(s),\quad -\infty<s<\infty.$$

$x_1(s)$，$x_2(s)$ 是以 C 的长 L 为周期的 C^3 級周期函数. C 的曲率 $k(s)$ 是 C^1 級函数；在 C 上的一点，满足

$$\frac{dk}{ds}=0 \tag{1·95}$$

的点称为 C 的**頂点**. 这样，就有下面的定理：

在 C^3 級卵形綫上至少存在四个頂点.

称它为**四頂点定理**. 这定理具备显著的格式. 这是由于，定理本身不仅与曲綫的部分而且与卵形綫这样一个曲綫全体有关，并且它还是以頂点这个局部的性质（因为頂点仅仅决定于 $k(s)$ 的微商）为其基础的.

这样，在局部的性质（**微分几何的性质**或**小处的性质**）的基础上以整体性质研究为目标的研究角度，称为**大处的微分几何**，近年来这方面的研究开始开展起来了. 和这方面对立的，有时称前几节所述的原先的微分几何为**小处的微分几何**. 在大处的微分几何里除了几何知識外，还需要其他各种部門的知識，内容是較难的，但是有兴趣的.

大处微分几何这句語詞发端于德国的 W. Blaschke. 他做过卵形綫和卵形面的研究，而在研究其微分几何性质的时候到达了这种想法. 但是現今它和黎曼几何、拓扑学、变分学、李群論等相結合，成为現代数学的中心問題之一.

其次，将叙述四頂点定理的 Herglotz 的証明.

定理 卵形綫上至少存在四个頂点.

証明 因为曲率 $k(s)$ 是連續函数，在給定的閉曲綫上一定存

在 $k(s)$ 的最大值和最小值的点. 設这两点分别是 M, N, 由于 M, N 是 k' 的零点,首先知道了两个頂点的存在.

由 M, N 分成两曲綫弧,其中从 N 向 s 的增加方向进行而达到 M 为止的弧,記作 $\overset{\frown}{MN}$; 剩下的曲綫弧記作 $\underset{\smile}{MN}$. 我們要闡明 $\overset{\frown}{MN}$, $\underset{\smile}{MN}$ 中至少在其一弧上还有个頂点. 为此, 因为 M, N 是給 $k(s)$ 以最大值、最小值的点, 如果在 $\overset{\frown}{MN}$, $\underset{\smile}{MN}$ 的任何一方上沒有頂点, 那末在 $\overset{\frown}{MN}$ 上处处是 $k'>0$, 而在 $\underset{\smile}{MN}$ 上处处是 $k'<0$. 我們只要在这个假定上說出矛盾的发生就够了.

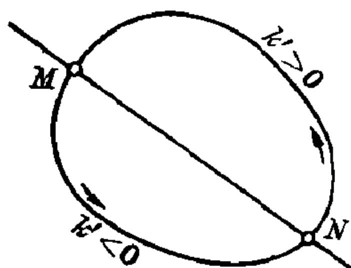


图 1.37

現在置直綫 MN 的方程为

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3=0.$$

把給定卵形綫的参数表示代到上式的左边的 x_1, x_2 并沿卵形綫一周作出积分

$$\oint(a_1x_1+a_2x_2+a_3)\,k'ds.$$

首先注意到在直綫 MN 的两側 $a_1x_1+a_2x_2+a_3$ 有不同的符号; 在 $\overset{\frown}{MN}$ 和 $\underset{\smile}{MN}$ 上 k' 的符号也不相同, 再注意到由于給定閉曲綫是卵形綫, $\overset{\frown}{MN}$, $\underset{\smile}{MN}$ 在直綫 MN 的不同側, 上列积分的被积分函数在全积分領域里有同一符号,所以

$$\oint(a_1x_1+a_2x_2+a_3)\,k'ds\neq 0.$$

另一方面,容易証明

$$\oint(a_1x_1+a_2x_2+a_3)\,k'\,ds=0.$$

为此,只須分別証明三式

$$\oint x_1k'ds=0,\quad \oint x_2k'ds=0,\quad \oint k'ds=0.$$

可是第一式的成立是因为

$$\oint x_1k'ds=-\oint x_1'kds,$$

并从 Frenet 公式

$$x_1'' = -kx_2', \quad x_2'' = kx_1'$$

代入这里，这式等于

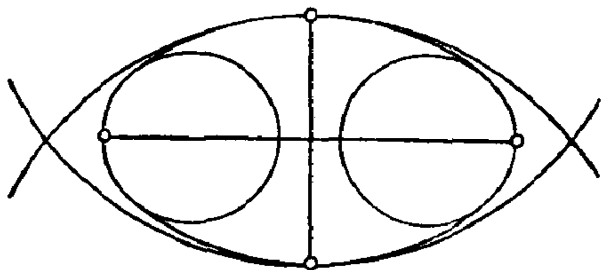
$$-\oint x_2'' ds = 0.$$

同样，看出第二式的成立. 至于第三式用不着証明也可明了.

这样一来，发生了矛盾. 因此，在 $\widehat{MN}$ 或 $\underset{\smile}{MN}$ 上必須有至少一个其他頂点.

現在，假定第三頂点 K 在 $\underset{\smile}{MN}$ 上，而且在給定的卵形綫上除 M, N, K 外再沒有其他頂点.

很明显，在 $\widehat{MN}$ 上 $k'>0$. 如果注意到在 $\underset{\smile}{MN}$ 上 M, N 分别是使 k 取最大、最小值的点，在它的两部分弧的任何一方上 $k'<0$ 也必須成立. 这样一来，根据上面的同一理由即使假定只有三个頂点，也会发生矛盾. 所以卵形綫上至少有四个頂点存在. (証毕)


图 1·38

实际存在恰恰有四个頂点的卵形綫. 例如，椭圓与其主軸的四个交点是頂点，此外再沒有其他頂点. 所以一般說来，不能够把四个这个数再加大了.

【习題】

1. 如果平面曲綫的曲率半徑从其一点 A 到一点 B 不断連續地增加，那末点 A 的曲率圓整个被包含于点 B 的曲率圓之內.

2. 如果卵形綫与一圓常有 $2n$ 个交点，那末这卵形綫至少有 $2n$ 个頂点.

3. 恰恰有四个頂点的卵形綫与各个圓至多相交于四个点.

1·9 Fenchel 定理

下面将举出关于空間曲綫大处微分几何的定理.

对于长 L 的单純空間閉曲綫 C 作积分

$$K=\int_0^L k(s)\,ds, \tag{1·96}$$

而称其值为 C 的**全曲率**.

通过空間原点 O 引曲綫的切綫 $\mathbf{x}'(s)$ 的平行单位长的向量，它的端点在单位球面上画出 C 的切綫象 Γ.

Γ 上的点如无一定的切綫时，称它为**奇异点**. 从 Frenet 公式

$$\xi_1'=k\xi_2$$

容易看出，这是作为 C 上的曲率为 0 的点的象而产生的. 因为

$$k=\sqrt{\mathbf{x}''^2}=\sqrt{\xi_1'^2},$$

我們有

$$K=\int_0^L\sqrt{\xi_1'^2}\,ds, \tag{1·97}$$

从而 C 的全曲率等于其切綫象 Γ 的长.

由(1·41)可見，設 C 的相邻切綫的交角是 $d\theta$，就可写出

$$K=\oint_C d\theta. \tag{1·98}$$

因此，也可以这样説：全曲率是沿閉曲綫走一周时，它的切綫的振幅角的总和.

1926 年 Fenchel 証明了下列定理.

定理　单純閉空間曲綫 C 的全曲率大于或等于 2π. 等号在 C 是平面凸閉曲綫的时候而且只在这时候成立.

下面将述 H. Liebmann 的証明. 在这之前要証初等几何的一个定理作为准备.

引理　在单位球面 S 上通过两点 A, B 的最短綫是通过这两点的大圓的劣弧.

証明　先考察 S 上由大圓弧作成的三角形 ABC，設其弧长为 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$. 如果最大边 $\overline{AB}\leqslant\pi$，那末

$$\overline{AB}\leqslant\overline{BC}+\overline{CA}. \tag{1·99}$$

为闡明这个事实，注意到大圓弧的长等于其两端和 S 的中心相連結而生成的角；我們只須証明：在三面角 $O\text{-}ABC$ 里，如果 $\angle AOB \leqslant \pi$，那末

$$\angle AOB \leqslant \angle BOC + \angle COA. \quad (1\cdot100)$$

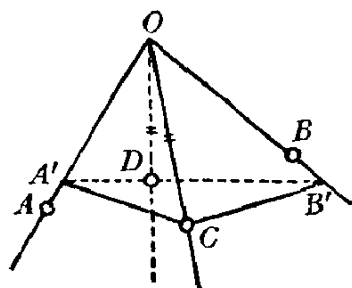


图 1·39

現在，在 $\angle AOB$ 內这样选取长 1 的綫段 OD，使

$$\angle COA = \angle AOD,$$

而且通过 C, D 引这样的平面，使和 OA, OB 或其延长綫相交，設交点为 A', B'. 这样，在 $\triangle A'B'C$ 里 $A'B' < A'C + B'C$, $A'D = A'C$，从而 $B'C > B'D$. 可是 $\triangle OB'C$, $\triangle OB'D$ 的其余两边各各相等，所以 $\angle B'OC > \angle B'OD$，因此，証明了 $(1\cdot100)$. $(1\cdot100)$ 的等号只在 $\angle AOB = \pi$ 即 A, B 是 S 的直徑对点时才成立.

如果对于 S 上的任何两点 A, B 成立 $\overline{AB} < \pi$，我們将証：以 $\overline{AB}$ 为长的大圓弧比連結 A, B 的其他任何曲綫弧都要短. 設 K 是 $\overline{AB}$ 上的任何一点；作中心 A 和球面半徑 $\overline{AK}$ 的 S 上的圓 $C(A, \overline{AK})$ 与中心 B 和球面半徑 $\overline{BK}$ 的圓 $C(B, \overline{BK})$，那末这两圓除 K 外沒有共同点. 实际上，設 L 是 $C(A, \overline{AK})$ 上的 K 以外的任何点；用 $(1\cdot99)$ 式导出 $\overline{AL} + \overline{BL} > \overline{AB}$，所以 $\overline{BL} > \overline{BK}$. 其次，考察以 A, B 为端点的其他曲綫弧，設它与 $C(A, \overline{AK})$, $C(B, \overline{BK})$ 相交于点 P, Q. 固定 A 而回轉弧 (AP) 使端点合于 K；又固定 B 而回轉弧 (BQ) 使端点 Q 合于 K，这样就得到在 K 連結着的两曲綫弧，而且全弧长比原来的曲綫弧要短一段弧 (PQ).

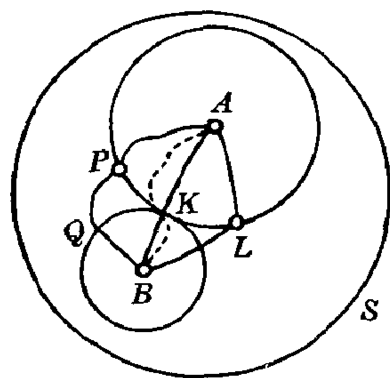


图 1·40

所以連結 A, B 的最短綫决不能含有两圓 $C(A, \overline{AK})$, $C(B, \overline{BK})$

的以外的点。可是 K 是 $\overline{AB}$ 上的任意点，所以最短綫必須是 $\overline{AB}$。

当 $\overline{AB}=\pi$ 时，以 A, B 为端点的大圓弧有无穷多，并且长度都是 π，而是最短綫。这是由于其部分弧必須是最短綫而且刚才証过的方法也适用到这里来。

定理的証明　在切綫象 Γ 上选取这样的两点 A, B，使得 Γ 的两弧 (AB), (BA) 的长相等。

[第一段]　当 $\overline{AB}=\pi$ 时，很明显地 Γ 的长 $L\geqslant 2\pi$。只在 Γ 是由連結 A, B 这两个直徑对点的两个大圓弧构成的情况下，才发生 $L=2\pi$。可是在給定的閉曲綫 C 上，以这些大圓弧为切綫象的部分必須分別地是和各大圓弧所在平面平行的平面上的曲綫弧，而且 C 是 C'' 級曲綫，它不可能有角点。所以这两个大圓弧組成一个大圓，从而 C 是平面曲綫。此外，如果 C 不是凸曲綫，在其切綫象的大圓上就会产生重复的部分，因此 $L=2\pi$ 的成立仅仅限于平面凸曲綫 C。

[第二段]　其次，为了考察 $\overline{AB}<\pi$ 的情况作准备，注意下面的事实：閉曲綫 C 的切綫象和 S 的所有大圓都要相交。設 g 是 S 的任何一个大圓，α 是和 g 的所在平面平行而且和 C 不相交的平面。从 C 上的各点引平面 α 的垂綫，它的长是 s 的函数，而且使其导函数为 0 的 s 的值在 Γ 上有对应点，这点必須在 g 上。因此，在 g 上对应于垂綫长的极大极小值的 Γ 的点至少有两个。

[第三段]　現在，設 M 是 $\overline{AB}$ 的中点，g 是和半徑 OM 垂直的平面上的大圓。又設 Γ 与 g 的交点之一是 P，而且假定 P 在弧 (AB) 上。那末，

$$\frac{L}{2}=(AP)+(BP)\geqslant\overline{AP}+\overline{BP}.$$

可是如果把 $\overline{PM}$ 延长到 P 的直徑对点 Q，便可看出

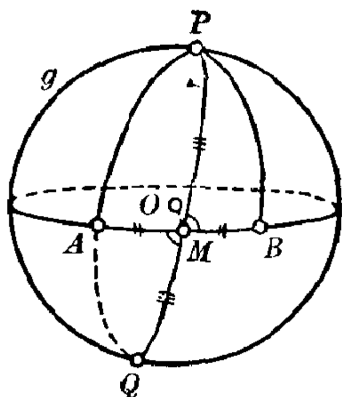


图 1.41

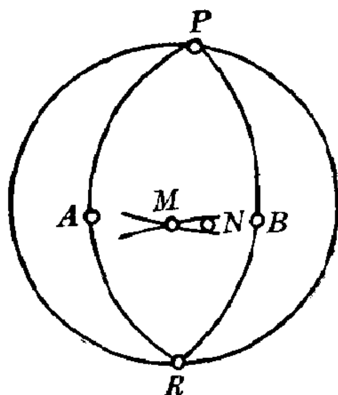


图 1.42

$$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{AP}+\overline{AQ}=\overline{PQ}=\pi,$$

所以 $L\geqslant 2\pi$. 等号发生在 (AP), (BP) 都是大圓弧的时候;由于 (AB) 在 P 以外再不和 g 相交,从第二段看出这时 (BA) 也要和 g 相交于点 R, (AR) 和 (BR) 也都是大圓弧,而且其和等于 π. 現在考察 $C\left(P, \frac{\pi}{2}\right)$, $C\left(R, \frac{\pi}{2}\right)$;如果它們在点 M 相切,那末 $\overline{PR}=\pi$, 并且 P, R 平分 Γ, 所以归結到第一段的情况, Γ 变为一个大圓,而与 $AB<\pi$ 矛盾. 如果上述两圓不相切,那末在 M 的充分邻近領域里一定有点 N, 它距 P 和 R 都小于 $\frac{\pi}{2}$. 因为 $\overline{AB}<\pi$, 只要把 N 取在 M 的充分近处,便可使 Γ 上的所有点到 N 的距离都小于 $\frac{\pi}{2}$, 从而 $C\left(N, \frac{\pi}{2}\right)$ 与 Γ 不相交. 这与 S 的所有大圓和 Γ 相交的事实矛盾. 因此,当 $\overline{AB}<\pi$ 时,等号不会成立.

由于 L 等于 C 的全曲率,这样便証明了定理.

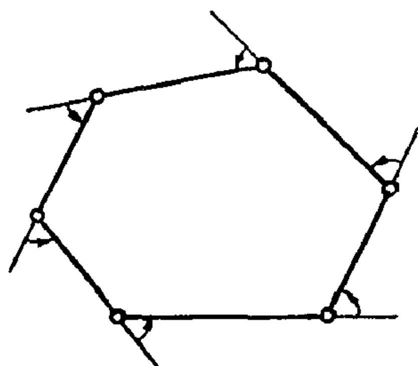


图 1.43

如前所述, 把空間曲綫 C 的全曲率解釋做其切綫的振幅角的总和. 如所周知,平面上凸多角形的外角和是 2π. 当把多角形看作平面曲綫时, 各外角就是其切綫的振幅角,所以外角和是 2π 这一

事实，相当于 Fenchel 定理的特殊情况。我們可以把 Fenchel 定理看成这初等几何定理在空間閉曲綫的拓广。

其次，将述 Fenchel 定理的一个应用。

定理 凡曲率 $k(s) \leqslant \frac{1}{R}$ ($R>0$ 常数) 的最短閉曲綫是半徑 R 的圓。

証明 根据 Fenchel 定理，

$$\oint k(s)ds \geqslant 2\pi,$$

从此看出：設 L 是 $k(s) \leqslant \frac{1}{R}$ 的閉曲綫的长，

$$L \geqslant 2\pi R.$$

因此，半徑 R 的圓周是 $2\pi R$，所以是最短的。不但如此，除圓以外再不存在 $L=2\pi R$ 的曲綫。实际上，从 Fenchel 定理只在平面凸曲綫的情况下才能成立等号。假如它不是一个圓而具有 $2\pi R$ 的周长的話，在变数 s 的同一領域 $0 \leqslant s \leqslant 2\pi R$ 里 $k(s) \leqslant \frac{1}{R}$，而且 $k(s) < \frac{1}{R}$ 的 s 一定是存在的，从 $k(s)$ 的連續性得到

$$\oint k(s)ds < \oint \frac{ds}{R} = 2\pi,$$

而产生了矛盾。这样一来，証明了定理。

1·10 Schur 定理

再举出大处微分几何定理的一、二个例子于下。

定理(A. Schur) 設 C 是曲率 $k(s)$ 的平面曲綫弧，并且它和連結两端点的弦 AB 一起构成凸曲綫。又設 C^* 是和 C 有同长 L 的曲綫弧，而且当它为同参数 s 所表达时，$k^*(s) \leqslant k(s)$。如果 d^*, d 是連結它們的端点的弦长，$d \leqslant d^*$。等号在 C 与 C^* 合同的时候而且只在这时候成立。

从基本定理 II 看到，对于空間曲綫可以不改变它的弧长和曲率，而仅单独变动它的撓率．单独变动撓率的曲綫的变形，称为歪曲；Schur 定理表明了，平面凸曲綫弧經过歪曲之后，它的弦一定要变长．

証明 設 Γ, Γ^* 分别是 C, C^* 的切綫象，P_1, P_2 是在 Γ 上对应于 C 的弧长 s_1, s_2 的两点，而且 P_1^*, P_2^* 是在 Γ^* 上对应于同弧长 s_1, s_2 的两点．

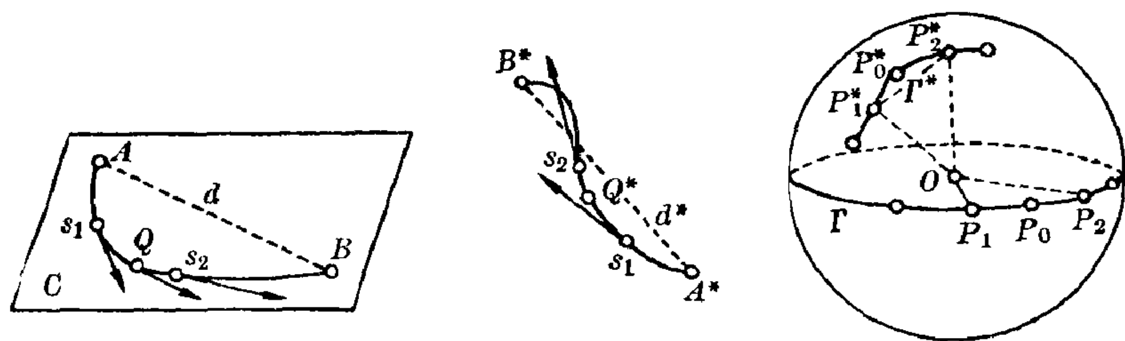


图 1·44

又設 $\widehat{P_1P_2}$, $\widehat{P_1^*P_2^*}$ 也表示 Γ, Γ^* 上的曲綫弧 $\widehat{P_1P_2}$, $\widehat{P_1^*P_2^*}$ 的长，并且 $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_1^*P_2^*}$ 表示这些曲綫弧的端点間的球面距离．明显地成立

$$\overline{P_1P_2}\leqslant\widehat{P_1P_2},$$

$$\overline{P_1^*P_2^*}\leqslant\widehat{P_1^*P_2^*}.$$

可是 $\int_{s_1}^{s_2} k(s)ds$ 不外乎是 Γ 的弧 $\widehat{P_1P_2}$ 的长，所以从假設 $k^*(s)\leqslant k(s)$ 成立

$$\widehat{P_1^*P_2^*}\leqslant\widehat{P_1P_2}.$$

由于 C 和它的端点的連結弦 AB 一起构成凸曲綫，Γ 是大圓弧．因而，如果 $\widehat{P_1P_2}\leqslant\pi$，就有 $\overline{P_1P_2}=\widehat{P_1P_2}$，从而当 $\widehat{P_1P_2}\leqslant\pi$ 时，成立关系式

$$\overline{P_1^*P_2^*} \leqslant \widehat{P_1^*P_2^*} \leqslant \widehat{P_1P_2} = \overline{P_1P_2}. \qquad (1\cdot101)$$

现在，在 C 上取这样的点 Q，使得 C 在 Q 的切綫和弦 AB 平行．如果 P_0 是 Γ 上的 Q 的象点，那末很明显地 Γ 上的任意一点 P_1 滿足条件 $\widehat{P_0P_1} \leqslant \pi$．从而，設 P_0^* 是在 Γ^* 上 P_0 的对应点，成立

$$\overline{P_0^*P_1^*} \leqslant \overline{P_0P_1}. \qquad (1\cdot102)$$

因此，得到

$$\cos \overline{P_0^*P_1^*} \geqslant \cos \overline{P_0P_1}.$$

可是 C 的弦 AB 的长 d 等于 C 在弦 AB 上的正射影，从而可以表成

$$d = \int_0^L \cos \overline{P_0P(s)}\, ds.$$

另一方面，

$$\int_0^L \cos \overline{P_0P(s)}\, ds \leqslant \int_0^L \cos \overline{P_0^*P^*(s)}\, ds,$$

而且最后式的右边是把 C^* 投到在 P_0^* 的切綫上的正射影，所以等于 C^* 的两端点的連結弦（长是 d^*）在 P_0^* 的切綫上的正射影，从而 $\leqslant d^*$．这样一来，我們得出

$$d \leqslant d^*.$$

其次，将証等号只限于 C 和 C^* 合同时才成立．为此，假設 $d = d^*$，那末 $(1\cdot102)$ 式恒成立，而且 C^* 的端点 A^*，B^* 的連結弦 A^*B^* 与 C^* 在 Q^* 所引的切綫必須平行．从 $(1\cdot102)$ 中等式的成立获得

$$\overline{P_0^*P_1^*} = \widehat{P_0^*P_1^*},$$

从而 $\widehat{P_0^*P_1^*}$ 是大圓弧．这样，看出 C^* 的弧 $\widehat{A^*Q^*}$，$\widehat{B^*Q^*}$ 都是平面曲綫．又因为 Γ 的弧长可以表成 $\int_0^s k(s)\,ds$，只要注意到

$$\widehat{P_0^*P_1^*} = \widehat{P_0P_1}$$

和假設 $k^*(s) \leqslant k(s)$，我們看出 $\widehat{A^*Q^*}$，$\widehat{B^*Q^*}$ 和 $\widehat{AQ}$，$\widehat{BQ}$ 分別在对应点有相等的曲率．这样一来，根据曲綫論的基本定理 I 可以断定，弧 $\widehat{AQ}$ 和 $\widehat{A^*Q^*}$ 合同，而且 $\widehat{BQ}$ 和 $\widehat{B^*Q^*}$ 合同．

因此，我們只須闡明 $\widehat{A^*Q^*}$，$\widehat{B^*Q^*}$ 在同一平面內．假如这两曲綫弧不落在同一平面內的話，这些曲綫弧所在的两平面的交綫上必有 Q^*，而且 $\widehat{A^*Q^*}$，$\widehat{B^*Q^*}$ 在 Q^* 必須和这交綫相切．可是这交綫必須和 A^*B^* 平行，为此 A^*，B^* 就必須都在这交綫上．但是从 $\widehat{A^*Q^*}$，$\widehat{B^*Q^*}$ 和 C 的一部分的 $\widehat{AQ}$，$\widehat{BQ}$ 分別地是合同的这一事实看出，上面所述是不可能的．所以 $\widehat{A^*Q^*}$，$\widehat{B^*Q^*}$ 构成一条平面曲綫．因此看出 C，C^* 完全合同．(証毕)

从 Schur 定理作为应用可以导出下列的 Schwarz 定理：

定理(H. A. Schwarz) 設 C 是連結給定的两点 A，B 的曲綫弧，而且其曲率 $k(s)$ 滿足 $k(s) \leqslant \frac{1}{R}$ 的关系，这里 $d = \overline{AB}$，$R \geqslant \frac{1}{2}d$．又設 S 是通过 A，B 的半徑 R 的圓．这时，C 的长或者比 S 的劣弧 $\underset{\smile}{AB}$ 来得短，或者比 S 的优弧 $\widehat{AB}$ 来得长．

証明 我們可以假定 C 的长 L 比 $2\pi R$ 短，而比 S 的劣弧 $\underset{\smile}{AB}$ 长来进行討論．这是由于，如果相反，$L \geqslant 2\pi R$ 或者比劣弧 $\underset{\smile}{AB}$ 短，应該証明的事实已經摆在面前了．現在，为

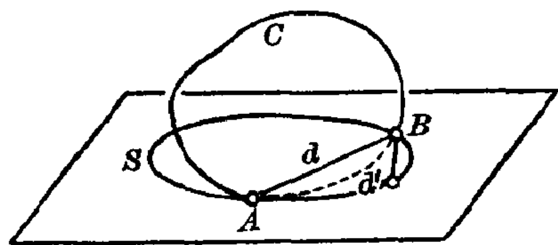


图 1.45

了要把 C 和同长 L 的 S 的弧作比較，設 S 的这种弧的两端的連結弦长是 d'，从 Schur 定理得知 $d' \leqslant d$，从而 L 比优弧 $\widehat{AB}$ 来得长．因而証明了定理．

在大处微分几何的問題里，沒有象小处微分几何的 Frenet 公式那样强有力的武器，对各个問題有必要分別作出独有的想法．

第2章　合同变换群与微分形式

2·1　合同变换

在解析几何里我們学过两个直交笛卡儿坐标系間的坐标变换。設(x_1', x_2')坐标系的原点O'关于(x_1, x_2)坐标系的坐标是(a_1, a_2)，而且x_1'軸和x_1軸作成的角是θ。那末，从右图容易看出同一点P关于两坐标系的坐标(x_1, x_2)，(x_1', x_2')之間成立下列关系：

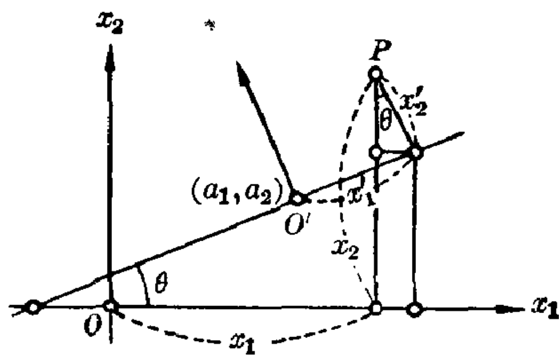


图　2·1

$$
\left.\begin{aligned}
x_1 &= x_1'\cos\theta - x_2'\sin\theta + a_1,\\
x_2 &= x_1'\sin\theta + x_2'\cos\theta + a_2.
\end{aligned}\right\} \tag{2·1}
$$

用$\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$分别表示$O'x_1'$, $O'x_2'$方向的单位向量；向量$\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'P}$即$\overrightarrow{OO'}+x_1'\mathbf{e}_1'+x_2'\mathbf{e}_2'$关于$(x_1, x_2)$坐标系的支量分别是由上式所給定的$x_1$, x_2。上式即所謂坐标变换的公式。

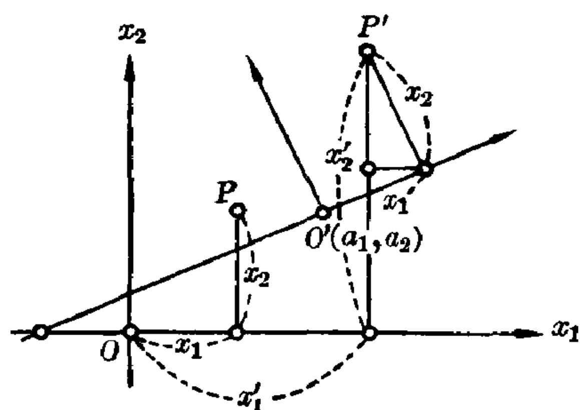


图　2·2

其次，平面上一对一的点对应称为**变换**。如果在一个变换下任意图形F与其对应图形F'恒是合同的，称所論点对

应为这平面上的**合同变换**.

現在，考察这样的平面上的合同变換使右手制的直交笛卡儿坐标系的象也形成右手制. 称这种合同变换为**运动**或**直接合同变换**. 从几何方面明显地看出，这是平行移动与旋轉相結合而产生的. 設以运动把原点 (0, 0) 变换到其象(a_1, a_2)，并使 x_1 軸的象和 x_1 軸做成角 θ. 如果关于(x_1, x_2)軸具有坐标(x_1, x_2)的一点是 P，而且 P 的象 P' 关于(x_1, x_2)坐标系的坐标是(x_1', x_2')，只要注意到 P' 关于(x_1, x_2)坐标系的象即新坐标系的坐标不外乎是(x_1, x_2)这个事实，便明了 P 的坐标(x_1, x_2)与 P' 的坐标(x_1', x_2')之間成立着同(2·1)完全一样的关系式:

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= x_1\cos\theta - x_2\sin\theta + a_1, \\ x_2' &= x_1\sin\theta + x_2\cos\theta + a_2. \end{aligned}\right\} \tag{2·2}$$

反过来，在平面上由(2·2)給定的点对应，明显地是运动.

其次，考察这样的合同变换，使右手制的坐标系变为左手制的坐标系。称它为**間接合同变换**. 設 (x_1, x_2) 坐标系的原点經过这变换变为坐标 (a_1, a_2) 的点，而且 x_1 軸的象直綫同 x_1 軸做成角 θ. 又設任意点 P

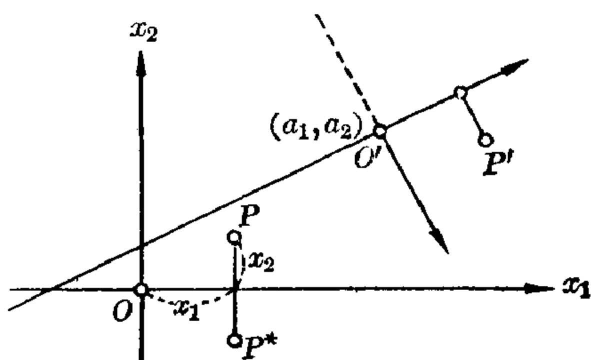


图 2·3

經过所論变换的象是 P'，把 (x_1, x_2) 坐标系的象的左手制坐标系关于 x_1 軸的象直綫轉折之后，得到右手制坐标系；关于这个坐标系的 P' 的位置等于 P^* 的在原坐标系下所占的相对位置，其中 P^* 表示点 P 关于原坐标系的 x_1 軸的对称点.

設 P, P' 的坐标分别是(x_1, x_2)，(x_1', x_2')；因为 P^* 的坐标是$(x_1, -x_2)$，从(2·2)得到

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= x_1\cos\theta + x_2\sin\theta + a_1, \\ x_2' &= x_1\sin\theta - x_2\sin\theta + a_2. \end{aligned}\right\} \qquad (2\cdot3)$$

反过来，这个形式都是間接合同变换．这样一来，(2·3)是一般的間接合同变换式．正象右手制直交坐标系同类間的坐标变换与运动表达式在形状上完全相同的情况一样，从右手制到左手制直交坐标系的坐标变换与間接合同变换式也具有同一形状．合同变换与坐标变换有同一形状，这是包含重大意义的事实．

現在，設在方陣

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

的元之間成立关系

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1, \qquad a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1,$$

$$a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0,$$

就称它为**二阶直交方陣**．

(2·2)，(2·3)的右边关于 x_1, x_2 的方陣

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

都是直交方陣．反过来，只要适当地选取 θ 的話，任何二阶直交方陣重合于上述的二直交方陣中的一个．（証明容易，让讀者自做．）在(2·2)，(2·3)的右边里 x_1 的两个系数是 Ox_1 的象直綫上的单位向量关于(x_1, x_2)坐标系的支量；同样，x_2 的两个系数是 Ox_2 的象直綫上的单位向量的有关支量．

現在，考察这样的三阶方陣(a_{ij})，对于它的各元成立关系

$$\sum_{i=1}^{3} a_{ij}a_{ik} = \delta_{jk}, \qquad (2\cdot4)$$

其中 δ_{jk} 具有下列意义：

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{当 } j = k \text{ 时}, \\ 0 & \text{当 } j \neq k \text{ 时}, \end{cases}$$

即所謂 Kronecker 的 δ. 这时，称方陣 (a_{ij}) 为**三阶直交方陣**. (在二阶直交方陣里把 i, j, k 看做取値 1, 2, 也可写为上述形式的条件式.) 置 $\Delta=$ 行列式 $|a_{ij}|$，那末从 (2·4) 容易导出

$$\Delta^2=1, \quad \therefore \quad \Delta=\pm 1.$$

乘 a_{lj} 于 (2·4) 式的两边，并对 j 作和，便得到

$$\sum_i\left(\sum_j a_{ij}a_{lj}\right)a_{ik}=a_{lk}.$$

如果置 $\sum_j a_{lj}a_{ij}-\delta_{li}=\lambda_{li}$，就可改写上式为

$$\sum_i \lambda_{li}a_{ik}=0.$$

現在固定 l 而使 k 取流动値 1, 2, 3, 便导出联立一次方程. 可是

$$\Delta=\det|a_{ik}|\neq 0,$$

所以这联立方程的解除 (0, 0, 0) 外再不存在了. 因此 $\lambda_{li}=0$，就是

$$\sum_j a_{lj}a_{ij}=\delta_{li}. \tag{2·5}$$

这同 (2·4) 相类似，只是取和用的指标已成为 a_{ij} 的第二个指标了.

在空間里一对一的点对应也称为**变換**. 設变換 T 是这样的，空間的任何两点間的距离在 T 之下等于两个对应点間的距离，那末称 T 为**合同变換**.

如果在空間里选用直交坐标系，同平面的时候完全一样地可以把合同变換式写成

$$x_i'=\sum_j a_{ij}x_j+a_i,$$

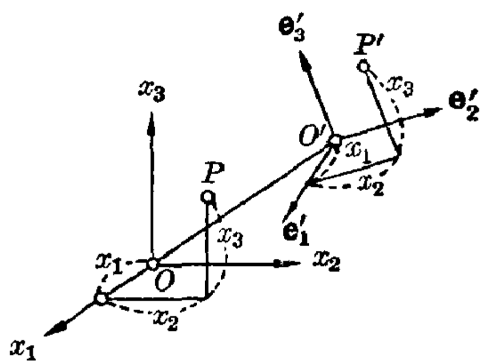


图 2·4

式中 (a_{ij}) 表示直交方陣. 为明了这事实，同平面的时候一样，設 Ox_1, Ox_2, Ox_3 的象直綫上的单位向量分别是 $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$; 任何一点 P 关于 (x_1, x_2, x_3) 坐标系的坐标是 (x_1, x_2, x_3)，而且 P 在所論的合同变換下的象是 P'，那末

$$\overrightarrow{OP'}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'P'}=\overrightarrow{OO'}+x_1\mathbf{e}_1'+x_2\mathbf{e}_2'+x_3\mathbf{e}_3'.$$

設 $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'$ 关于 (x_1, x_2, x_3) 坐标系的支量分别是 (a_{11}, a_{21}, a_{31}), (a_{12}, a_{22}, a_{32}), (a_{13}, a_{23}, a_{33}); O' 的坐标是 (a_1, a_2, a_3), P' 的坐标是 (x_1', x_2', x_3'), 而且把 $\overrightarrow{OP'}$ 分成为关于 (x_1, x_2, x_3) 的支量，便得出上述的合同变换式.

关于 $\Delta=\det|a_{ij}|$ 的正負值，如果 $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'$ 在这顺序做成右手制，$\Delta>0$; 如果做成左手制，$\Delta<0$. 很明显,反过来也成立. 当 $\Delta>0$ 时，即当施行平行移动与旋轉于 (x_1, x_2, x_3) 坐标系，就可导出所論的合同变换时，称它为**直接合同变换**或**运动**. 当 $\Delta<0$ 时，除此之外还須把关于一平面的对称变换（也称为**折轉**）結合进去. 称它为**間接合同变换**.

【习题】

1. 証明空間的直接合同变换

$$x_i'=\sum a_{ik}x_k, \quad (a_{ik})\text{直交方陣}, \ |a_{ik}|>0$$

一定是繞某軸的旋轉（就是通过原点而且其上的所有点都不动的直綫一定存在）.

2. 証明正行列式的二阶直交方陣可以表为下列形式:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} & \dfrac{-2\lambda}{1+\lambda^2} \\ \dfrac{2\lambda}{1+\lambda^2} & \dfrac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} \end{pmatrix}.$$

3. 証明行列式 $|a_{ij}+\delta_{ij}|\neq 0$ 的三阶直交方陣 (a_{ij}) 可以表为下列形式:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1+\lambda^2-\mu^2-\nu^2}{1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2} & \dfrac{2(\lambda\mu+\nu)}{1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2} & \dfrac{2(\lambda\nu-\mu)}{1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2} \\ \dfrac{2(\lambda\mu-\nu)}{1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2} & \dfrac{1-\lambda^2+\mu^2-\nu^2}{1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2} & \dfrac{2(\mu\nu+\lambda)}{1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2} \\ \dfrac{2(\lambda\nu+\mu)}{1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2} & \dfrac{2(\mu\nu-\lambda)}{1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2} & \dfrac{1-\lambda^2-\mu^2+\nu^2}{1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2} \end{pmatrix},$$

其中 λ, μ, ν 是参数. 称它为 Cayley 的参数表示.

2·2 合同变换群

我們对于数都知道加减乘除的四种演算。但是，当考察正数和負数两方面的时候，由于

$$a-b=a+(-b),$$

可以把减法看为加法的同一演算；又当考察 0 除外的所有有理数或者所有实数集时，一个数和它的倒数一齐地被包含在这集里，由于

$$a\div b=a\times\frac{1}{b},$$

可以把除法看为乘法的同一演算。在这样的意义下，关于数的演算变为加法和乘法两种。

这里，关于这两演算有了下述的显著的类似。首先在加法里設整数的全体、有理数的全体或实数的全体是 G，并且当某数 a 属于 G 时，用 $a\in G$ 表达这个事实，那末成立

1. 如果 $a,\ b\in G$，那末 $a+b\in G$；
2. 如果 $a,\ b,\ c\in G$，那末 $(a+b)+c=a+(b+c)$；
3. 对于每一数 $a\in G$，必有一定的数 $0\in G$，使
$$a+0=0+a=a;$$
4. 对于每一数 $a\in G$，必有这样的数 $-a\in G$，使
$$a+(-a)=(-a)+a=0.$$

同样，在乘法里用 G 表达除了 0 以外的有理数的全体或者除了 0 以外的实数的全体，那末我們得到

1′ 如果 $a,\ b\in G$，那末 $ab\in G$；

2′ 如果 $a,\ b,\ c\in G$，那末 $(ab)c=a(bc)$；

3′ 对于每一数 $a\in G$，必有一定的数 $1\in G$，使 $a\cdot 1=1\cdot a=a$；

4′ 对于每一数 $a\in G$，必有数 $a^{-1}\in G$，使 $a\cdot a^{-1}=a^{-1}\cdot a=1$.

这样，在两演算里有显著的类似性. 可是这样的演算不仅在数的情况而且还在其他許多数学对象的情况下发生，所以更抽象地研究同上述演算具有論理上同一构造的事物，是所希望的. 为此，一般地称若干个物的集为**集**. 当取一个集 G 的两元 a, b 时，假設已給定了把它們結合(合成)起来的法則. 把合成了的物記作 ab，而且考察滿足下列合成法則的情况:

1° 如果 $a, b\in G$, 那末 $ab\in G$;

2° 如果 $a, b, c\in G$, 那末 $(ab)c=a(bc)$;

3° 对于所有的 $a\in G$, 必有 $e\in G$, 使 $ae=ea=a$(称 e 为**么元**);

4° 对于所有的 $a\in G$, 必有 $a^{-1}\in G$, 使 $aa^{-1}=a^{-1}a=e$(称 a^{-1} 为 a 的**逆元**).

这时，我們說: G 关于所論的合成法則做成**群**.

設有两变换 S, T，先运用 S 到任意点 P，把其象記作 $S(P)$；再运用 T 到这象，把所得出的象記作 $TS(P)$，而考察点 P 和点 $TS(P)$ 間的对应；如果把它写做 TS，很明显地 TS 也是变换. 称这变换为原来的两变换 S, T 的**积**. 如后文所述，积这个語辞是由于它和数的乘法相类似而使用起来的，但是 ST 与 TS 一般地是不相等的，就是說：从几何看来并不表达同一变换.

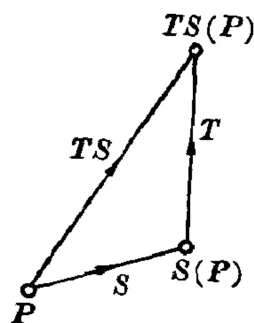


图 2·5

在欧几里得空間里(在平面里也完全同样)設有一个变换集 G，把 G 的元即变换表成 T_1, T_2, T_3 等等.

当变换集 G 对于如上文中所定义的积的演算满足下列条件时，称为**变换群**. 就是:

1) 設 G 的任意两变换是 T_1, T_2, T_2T_1 也是属于 G 的变换;

2) 設 G 的任意三变换是 T_1, T_2, T_3,

$$T_3(T_2T_1)=(T_3T_2)T_1;$$

3) 对于 G 的任意变换 T，使

$$TE=ET=T$$

成立的变换 E，必属于 G(称 E 为**恒等变换**或**么变换**)；

4) 对于 G 的任意变换 T，使

$$TT^{-1}=T^{-1}T=E$$

成立的变换 T^{-1}，必属于 G(称 T^{-1} 为变换 T 的**逆变换**)。

变换群这个概念在几何上是非常重要的.

設欧几里得空間的合同变换的全体是 G，那末 G 做成变换群。

証明 [第一段] 因为从几何明显地看出：两个合同变换的积也是合同变换，同 T_1，T_2 一样，T_2T_1 也属于 G。

[第二段] 参照图2·6便可明了，这是关于被称为变换的物的总体成立的性质。图中的(左)、(右)表达在 2) 中的等式左右两边有关的路徑.

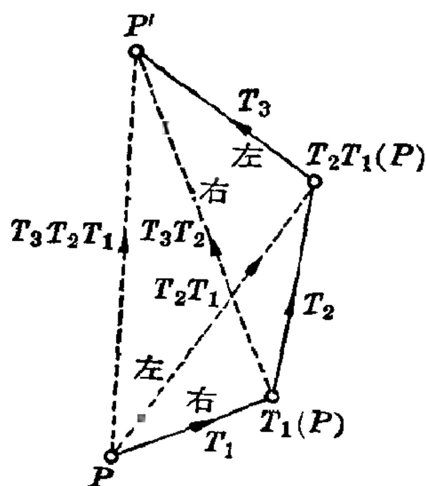


图 2·6

因 2) 的关系式成立，把 $T_3(T_2T_1)$ 和 $(T_3T_2)T_1$ 簡記作 $T_3T_2T_1$。

[第三段] 恒等变换就是任何点和它本身对应的变换 $x_i'=x_i$ 也是合同变换. 取它为 E 就行了.

[第四段] 当点 P 在合同变换 T 下与 P' 对应时，設使 P' 与 P 对应的变换是 T^{-1}，那末 T^{-1} 也是合同变换. 这占着在 4) 的意义下的 T^{-1} 的地位.

称这群为**合同变换群**. 現在将求两个合同变换

$$S:\quad x_i'=\sum a_{ij}x_j+a_i \quad 与 \quad T:\quad x_i'=\sum b_{ij}x_j+b_i$$

的积 TS 的式子. 为此，設坐标 x_i 的点被 S 移到 x_i'，又接着被 T 移到点 x_i''，我們得到

$$x_i''=\sum b_{ij}(\sum a_{jk}x_k+a_j)+b_i.$$

因此，当置 $x_i''=\sum c_{ij}x_j+c_i$ 时，便有

$$\left.\begin{aligned}c_{ij}&=\sum b_{ik}a_{kj},\\ c_i&=b_i+\sum b_{ik}a_k.\end{aligned}\right\}\tag{2·6}$$

其次，試求 S^{-1} 的式子．把 S^{-1} 的式子写成 $x_i'=\sum A_{ij}x_j+A_i$；从 $S^{-1}S=E$ 必須成立

$$\sum A_{ik}(\sum a_{kj}x_j+a_k)+A_i=x_i,$$

从而看出

$$\left.\begin{aligned}\sum A_{ik}a_{kj}&=\delta_{ij},\\ A_i+\sum A_{ik}a_k&=0.\end{aligned}\right\}\tag{2·7}$$

可是 (a_{ij}) 是直交方陣，

$$\sum a_{ki}a_{kj}=\delta_{ij},$$

并从 (2·7) 和此式边边相减，便得到

$$\sum(A_{ik}-a_{ki})a_{kj}=0.$$

固定 i 而使 j 取值 1, 2, 3, 最后式变为形如

$$\sum y_k a_{kj}=0$$

的三元一次方程組．由于 $|a_{kj}|\neq 0$, 立刻看出 $y_k=0$, 所以

$$A_{ik}=a_{ki}.$$

此外，从 (2·7) 得到

$$A_i=-\sum a_{ki}a_k.$$

这样一来，我們获得 S^{-1}：

$$x_i'=\sum a_{ki}x_k-\sum a_{ki}a_k.\tag{2·8}$$

当群 G 的元的子集 H 关于 G 里的同一合成法則独自构成群时，称 H 为 G 的**子群**．在合同变换群里，

$\varDelta=|a_{ij}|>0$ 的变换全体，

$a_i=0$ 的变换全体，

$\varDelta=|a_{ij}|>0$, $a_i=0$ 的变换全体

各各是合同变换群的子群，而分别地被称为运动群、直交变换群、旋轉群.

我們是在研究欧几里得微分几何，所以关于什么是欧几里得几何这个問題必須預先有正确的理解. 这是由于，对这本质的問題深刻地鉆研进去，一定会碰到欧几里得几何是什么的問題，而在那里往往会发現解决的苗头.

那末，所謂欧几里得几何正如在欧几里得的几何原本中所述的，是从若干公理的一系論理地导出的命題的一集. 在这公理体系中，目前最严密的而且最精炼的要推 Hilbert 的公理体系. 但是，也有和它不同的想法. 那就是以 Klein 的思想为根据的，而且是和群論具有密切关系的.

我們在初等几何里学过三角形和圓等等的图形以及它們的性质，并且了解合同的图形有相同的性质. 这表明了，在初等几何里所謂图形 F 的性质是和 F 合同的一切图形的公共性质. 由于同 F 合同的图形是从 F 运用合同变换而导出的，而且反过来从 F 运用合同变换而导出的图形統統是同 F 合同的，在初等几何里被称为 F 的性质是指这样运用合同变换于 F 而得来的一切图形的公共性质而言，換句話說，是指对 F 无論怎样运用合同变换也不改变的性质而言. 如上文所述，平面上的所有合同变换的集做成群. 注意到以上的内容，我們把看法倒轉过来，終于作出如下的定义：

欧几里得几何是在图形的性质中系統地討論那些在合同变换群 G 下不变的性质和数量(称为**不变式**)的数学分科.

这是把 Klein 在更一般形式下表达的思想搬到欧几里得几何里来而叙述的內容. 根据 Klein 的思想，有一个变换群就有在这群下作为不变式理論的一种几何.

讀者們一定会驗証，曲綫的曲率和撓率

$$k=\sqrt{\frac{(\dot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}})^2}{(\dot{\mathbf{x}}^2)^3}},$$

$$w=\frac{|\dot{\mathbf{x}}\ \ddot{\mathbf{x}}\ \dddot{\mathbf{x}}|}{(\dot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}})^2}$$

都是运动群的不变式，而且对于参数变换

$$\bar{t}=\phi(t),\quad a\leqslant t\leqslant b$$

(ϕ 是 t 的单调增加函数，$\dot{\phi}(t)>0$) 是不变的事实。 因为 k, w 是用曲綫的方程的微商来表达出来的，称为**微分不变式**。

$$\sqrt{\dot{\mathbf{x}}^2}\,dt$$

是微分，而它在上述的运动群和参数变换下也是不变的。 不过它是微分这一类的无穷小，把它改成为有限量之后得出的量

$$s=\int_a^t\sqrt{\dot{\mathbf{x}}^2}\,dt,$$

称为**积分不变式**。 在微分不变式和积分不变式里所含的微商中最高阶微商的阶数称为这不变式的阶数。 (k 二阶，w 三阶。) 弧长 s 是在給定曲綫的积分不变式中有最低阶的，又 k 是在微分不变式中最低阶的。 k^2, $\sqrt{k}$ 等虽也是最低阶的，但是象这样和 k 有函数关系的不变式除外，如所知，仅次于曲率 k 的最低阶不变式是撓率 w。

如果能够找出尽可能地低阶的不变式，用以表达給定图形的特征，从理論上可以說是給定图形的最簡洁的处理了。

【习題】

1. 証明形如 $x_i'=x_i+a_i$ 的变换(平行移动)全体做成群。

2. 用分析法証明：向量长、二向量做成的角、以一点发出的三向量为棱的平行六面体的体积对于合同变换群中的任何变换是不变的。

2·3　綫性常微分方程的解的存在定理

作为曲綫論基本定理的証明的准备工作，在这里将証綫性常

微分方程組的解的存在定理.

定理 設 $c_{\lambda\mu}(t)$ $(\lambda, \mu=1, 2, \cdots, m)$ 是在区間 $a\leqslant t\leqslant b$ 定义的 m^2 个連續函数,那末以 $u_1, u_2, \cdots, u_m$ 为未知函数的 m 个綫性常微分方程的一組

$$\frac{du_\lambda}{dt}-\sum_{\mu=1}^{m}c_{\lambda\mu}(t)\,u_\mu$$

必有任意初始値 $u_\lambda(a)=u_\lambda^0$ 的解,并且这种解只有一組.

証明 我們将根据被认为最簡单的逐次逼近法来作出解的存在証明. 現在,置

$$u_\lambda^1=u_\lambda^0+\int_a^t\sum c_{\lambda\mu}u_\mu^0\,dt,$$

$$u_\lambda^2=u_\lambda^0+\int_a^t\sum c_{\lambda\mu}u_\lambda^1\,dt,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_\lambda^n=u_\lambda^0+\int_a^t\sum c_{\lambda\mu}u_\lambda^{n-1}\,dt,$$

便获得在同一閉区間 $a\leqslant t\leqslant b$ 定义的 m 組函数列$\{u_1^n\}$, $\{u_2^n\}$, $\cdots$, $\{u_m^n\}$. 很明显,任何一个函数 $u_\lambda^n(s)$都是連續函数. 在这里将应用数学分析的一个基本定理,就是:

設有在同一区間里定义的函数列$\{u^n\}$, 每一个 u^n 在該区間是連續的. 如果 $\{u^n\}$ 在那区間里一致收斂, 那末給出其极限値的函数 $u(t)$ 也是連續的.

为此,将証明函数列 $\{u_1^n\}$, $\{u_2^n\}$, $\cdots$, $\{u_m^n\}$ 的每一个都是一致收斂的.

首先,因为 $c_{\lambda\mu}(t)$ 在閉区間 $a\leqslant t\leqslant b$ 是連續的,注意到这时一定存在这种常数 C,使

$$|c_{\lambda\mu}(t)|<\frac{C}{m}.$$

又置

$$\max|u_\lambda^0|<D.$$

这样一来，从定义看出

$$|u_\lambda^1-u_\lambda^0|\leqslant\int_a^t\sum|c_{\lambda\mu}|\cdot|u_\mu^0|dt$$

$$<\int_a^t m\cdot\frac{C}{m}\cdot D\,dt,$$

所以得到

$$|u_\lambda^1-u_\lambda^0|<CD(t-a).$$

同样，从

$$u_\lambda^2-u_\lambda^1=\int_a^t\sum c_{\lambda\mu}(u_\mu^1-u_\mu^0)dt$$

获得

$$|u_\lambda^2-u_\lambda^1|<C^2D\frac{(t-a)^2}{2},$$

一般地成立

$$|u_\lambda^n-u_\lambda^{n-1}|<C^nD\frac{(t-a)^n}{n!}\leqslant C^n D\cdot\frac{(b-a)^n}{n!}.$$

这里，在 $\{u_1^n\}$，$\{u_2^n\}$，…，$\{u_m^n\}$中，把任意一个記做 $\{u^n\}$；我們只須闡明：設 ε 是任意給定的正数，对于 $n>N(\varepsilon)$ 的所有正整数 n 和任意正整数 p 必成立

$$|u^{n+p}-u^n|<\varepsilon.$$

可是

$$|u^{n+p}-u^n|\leqslant|u^{n+p}-u^{n+p-1}|+|u^{n+p-1}-u^{n+p-2}|+\cdots+|u^{n+1}-u^n|$$

$$<\frac{C^{n+1}D(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}+\frac{C^{n+2}D(b-a)^{n+2}}{(n+2)!}+\cdots$$

$$+\frac{C^{n+p}D(b-a)^{n+p}}{(n+p)!}$$

$$<\frac{C^{n+1}D(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\left[1+\frac{C(b-a)}{n+2}+\frac{C^2(b-a)^2}{(n+2)(n+3)}+\cdots\right]$$

$$< \frac{C^{n+1}D(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\left[1+\frac{C(b-a)}{n+2}+\left(\frac{C(b-a)}{n+2}\right)^2+\cdots\right]$$

$$= \frac{C^{n+1}D(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n+2}{n+2-C(b-a)},$$

所以只要选取充分大的 N,使得 $C(b-a)<N+1$ 而且

$$\frac{C^{N+1}D(b-a)^{N+1}}{(N+1)!}\,\frac{N+2}{N+2-C(b-a)}<\varepsilon,$$

这个 N 与区間 $a\leqslant t\leqslant b$ 的点沒有关系，仅由 ε 决定，并且对于任意的正整数 $n>N$ 和 p 成立

$$|u^{n+p}-u^n|<\varepsilon.$$

由此可見，m 組函数列 $\{u_1^n\}$，$\{u_2^n\}$，…，$\{u_m^n\}$ 的每一个都是一致收斂的連續函数列,从而給出它們的极限值的函数 $u_1(t)$，$u_2(t)$，…，$u_m(t)$ 也都是連續函数,并成立

$$\lim_{n\to\infty} u_\lambda^n=u_\lambda.$$

在这里置

$$u_\lambda^n=u_\lambda^0+\int_a^t \sum c_{\lambda\mu}u_\mu^{n-1}\,dt$$

并使 $n\to\infty$；由于对一致收斂函数列极限过程 $n\to\infty$ 与积分的順序可以对調,便得到

$$u_\lambda=u_\lambda^0+\int_a^t \sum c_{\lambda\mu}u_\mu\,dt.$$

从此式的形式看出 $u_\lambda(t)$ 是可微分的函数,而导微的結果是

$$\frac{du_\lambda}{dt}=\sum c_{\lambda\mu}u_\mu.$$

这表明了，上面求到的函数 $u_\lambda(t)$ 是給定的綫性常微分方程組的解。

其次,来証解的唯一性。現在假定具备同一初始值 $u_\lambda(a)=u_\lambda^0$ 的解有两个,設它們是 u_λ，$\bar{u}_\lambda$，那末

$$\frac{du_\lambda}{dt}=\sum c_{\lambda\mu}u_\mu,$$

$$\frac{d\bar{u}_\lambda}{dt}=\sum c_{\lambda\mu}\bar{u}_\mu.$$

从而置 $v_\lambda=u_\lambda-\bar{u}_\lambda$ 时，便有

$$\frac{dv_\lambda}{dt}=\sum c_{\lambda\mu}v_\mu.$$

这表明了，v_μ 是給定的微分方程組的解．这里 $v_\lambda(0)=u_\lambda^0-u_\lambda^0=0$．这样，設 v_λ 是具有初始值 $(0, \cdots, 0)$ 的給定的微分方程組的解，如果能够証明 $v_\lambda(t)\equiv 0$，那末 $u_\lambda(t)\equiv\bar{u}_\lambda(t)$，就是解的唯一性得到了証明．

因此，我們假定 $v_\lambda(t)$ 是

$$\frac{dv_\lambda}{dt}=\sum c_{\lambda\mu}v_\mu$$

的解，并且 $v_\lambda(a)=0$．把两边积分起来，而且利用 $v_\lambda(a)=0$，便得到

$$v_\lambda(t)=\int_a^t\sum c_{\lambda\mu}v_\mu\,dt. \tag{2·9}$$

可是有这样的正常数 C, D，使

$$|v_\mu|<D,\quad |c_{\lambda\mu}|<\frac{C}{m},$$

所以

$$|v_\lambda|<DC(t-a).$$

把它代入(2·9)，就看出

$$|v_\lambda|<D\frac{(C(t-a))^2}{2}.$$

同样地，导出一般的結果

$$|v_\lambda|<D\frac{(C(t-a))^n}{n!}.$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(C(t-a))^n}{n!}=0,$$

我們获得

$$v_\lambda(t)\equiv 0.$$

2·4 曲綫論的基本定理

下文用 S_a, S_b 等記号表达看作为变换群的运动群 G 的元。这里 a, b 等表示对应的方陣 a_{ij}, b_{ij} 等的核文字.

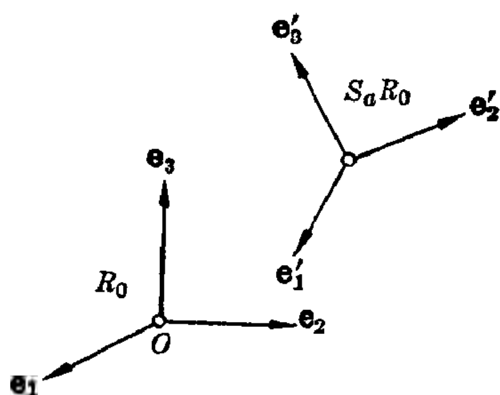


图 2·7

在空間里任意选取固定的右手制直交軸，設其原点是 O，而且在坐标軸上以 O 为始点的单位向量分别是 $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$，称标形 $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ 为 R_0. 对它施行 G 的变換而得出的 S_aR_0 也是右手制直交标形；反过来，任何右手制直交标形都可表成这个形状. 当参数 a, b 不相同时，决不成立

$$S_aR_0=S_bR_0.$$

实际上，对 R_0 施行恒等变換以外的 G 的变換，一定变为和 R_0 不相同的标形；从此看出：

$$S_a^{-1}S_bR_0=R_0$$

除了 $S_a^{-1}S_b=E$ 即 $S_a=S_b$ 以外，决不成立.

这样一来，我們写下 R_a 以代替 S_aR_0.

考察两标形 R_0 和 R；R 是根据一个运动 S 从 R_0 得出的. 設 S 的方程是关于 R_0 表达出来的. 空間的任意点 P 关于 R 的坐标等于 $S^{-1}P$ 关于 R_0 的坐标（∵ P 关于 R 和 $S^{-1}P$ 关于 R_0 具有相同的相对位置).

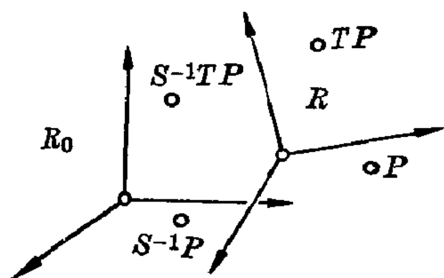


图 2·8

现在,考察另外一个运动T;把T关于R_0表达为解析式. 如果把T的同一几何运动关于R表达出来，究竟具有什么形式呢?我們将討論这个問題.

任意考察点P,按照T作它的象TP;从上述的結果TP关于R的坐标是$S^{-1}TP$关于R_0的坐标. 可是

$$S^{-1}TP=(S^{-1}TS)S^{-1}P,$$

并注意到$S^{-1}P$关于R_0的坐标就是P关于R的坐标这个事实,我們看出：看作为几何变换的T关于R是以$S^{-1}TS$的解析式表达出来的.

設关于R_0有一个以S_a表达起来的变换；和S_a相同的几何变换关于$R_b=S_bR_0$则是以$S_b^{-1}S_aS_b$表达出来的. 这是G中的一元. 反过来,G中的任意元S_c可以写成那种形状;从

$$S_c=S_b^{-1}(S_bS_cS_b^{-1})S_b$$

容易看出这个事实.

我們称一点关于R_0的坐标为**絕对坐标**,称它关于R_a的坐标为**相对坐标**. 从以上所述看出,无論使用絕对坐标或相对坐标,在分析方面都是可根据同一方程組来表达群G的.

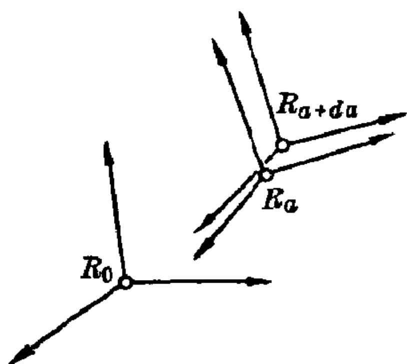


图 2·9

考察运动群G. 設R_0是分析地表达这群的标形,并且S_a是G的元.

取两个无穷接近的标形

$$R_a=S_aR_0,\quad R_{a+da}=S_{a+da}R_0.$$

很显然,把R_a移到R_{a+da}去的无穷小运动的表达式，关于R_0是$S_{a+da}S_a^{-1}$ (∵运用它到R_a便会明了).

那末,要把移R_a到R_{a+da}的几何变换关于R_a表达出来，究竟采取怎样的分析的形状呢?如上所述，它应当是$S_a^{-1}(S_{a+da}S_a^{-1})S_a$就是$S_a^{-1}S_{a+da}$.

現在,来計算 $S_a^{-1}S_{a+da}$. 如在(2·8)所演出的, S_a^{-1} 决定于

$$x_i' = \sum a_{ji}x_j - \sum a_{ji}a_j.$$

从此可見, $S_a^{-1}S_{a+da}$ 决定于

$$\begin{aligned} x_i'' &= \sum a_{ji}\{\sum (a_{jk}+da_{jk})x_k + a_j + da_j\} - \sum a_{ji}a_j \\ &= x_i + \sum a_{ji}da_{jk}x_k + \sum a_{ji}da_j. \end{aligned}$$

这样一来,如果把这无穷小运动写成

$$x_i'' = x_i - \sum \omega_{ik}x_k + \omega_i, \tag{2·10}$$

就有

$$\omega_{ik} = -\sum a_{ji}da_{jk}, \tag{2·11}$$

$$\omega_i = \sum a_{ji}da_j. \tag{2·12}$$

只要导微

$$\sum a_{ji}a_{jk} = \delta_{ik}$$

的两边,便立刻看出:微分形式 ω_{ik} 满足

$$\omega_{ik} + \omega_{ki} = 0.$$

这表明了,方陣 (ω_{ik}) 是**斜对称**的. 从而,在九个微分形式 ω_{ik} 之中一般地仅有六个 $\omega_{ik}(i\neq k)$ 不是 0, 而其中只有三个 $\omega_{ij}(i<j)$ 是独立的. 这三个与 ω_i 又是独立的.

把标形 S_aR_0, $S_{a+da}R_0$ 的原点分别命名为 $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}+d\mathbf{M}$.

为了求出标形 S_aR_0 关于 $S_{a+da}R_0$ 的相对位置, 从上述的无穷小运动式(2·10)首先置 $x_i=0$ 来导出

$$d\mathbf{M} = \sum \omega_i \mathbf{e}_i;$$

又从同式前后置 x_k 为 δ_{ik}, 0 而且边边相减,便得到

$$d\mathbf{e}_i = \sum \omega_{ik}\mathbf{e}_k.$$

这就是說, ω_i 和 ω_{ik} 在占据所論无穷小运动的参变数地位的同时,还是表达标形的相对位置的支量.

現在假定

$$\lambda_i(t), \quad \lambda_{ij}(t)\,(=-\lambda_{ji}(t)), \quad a\leqslant t\leqslant b$$

是任意給定的 t 的連續函数；要找出这样的依賴参变数 t 的标形集，使其相对支量滿足

$$\omega_i=\lambda_i(t)dt,\quad \omega_{ij}=\lambda_{ij}(t)dt,\quad a\leqslant t\leqslant b.$$

从(2·12)式得到

$$\sum a_{ji}\,da_j=\lambda_i\,dt,$$

$$\therefore\quad \frac{da_i}{dt}=\sum a_{ik}\lambda_k. \tag{2·13}$$

又从(2·11)式获得

$$-\sum a_{ji}\,da_{jk}=\lambda_{ik}\,dt,$$

$$\therefore\quad \frac{da_{jk}}{dt}=-\sum a_{jh}\,\lambda_{hk}. \tag{2·14}$$

因此，問題归結到能不能决定这样 t 的函数 $a_i(t)$，$a_{jk}(t)$，使得(2·13)，(2·14)同时成立——这一个綫性微分方程組的問題．根据2·3的定理，对于任意給定的初始条件，这組方程必有解．所以考察在条件

$$a_i(a)=0,\quad a_{jk}(a)=\delta_{jk}$$

之下的解．这时，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left[\sum a_{ji}(t)\,a_{ki}(t)\right]&\equiv\sum\frac{da_{ji}}{dt}\,a_{ki}+\sum a_{ji}\frac{da_{ki}}{dt}\\&=+\sum a_{jh}\lambda_{ih}a_{ki}+\sum a_{ji}a_{kh}\lambda_{ih}\\&=\sum(a_{jh}a_{ki}+a_{ji}a_{kh})\,\lambda_{ih}\equiv 0,\end{aligned}$$

从而 $\sum a_{ji}(t)\,a_{ki}(t)$ 是常数．按照初始条件得知

$$\sum a_{ji}(t)\,a_{ki}(t)=\delta_{jk},$$

就是說，$(a_{ij}(t))$ 恒是直交方陣．

这样一来，可以叙述这个結果如下．

結构定理　当活动标形依賴一个参变数而变动时，活动标形的无穷小变位的支量可不服从任何結构条件．

特别地，选取 $0\leqslant s\leqslant L$ 的参数 s 作为 t，且置

$$\lambda_1(s)\equiv 1,\quad \lambda_2=\lambda_3\equiv 0,$$

$$\lambda_{12}=-\lambda_{21}=k(s),\quad \lambda_{23}=-\lambda_{32}=w(s),$$

$$\lambda_{11}=\lambda_{22}=\lambda_{33}\equiv 0,\quad \lambda_{13}=-\lambda_{31}\equiv 0,$$

我們看出：綫性微分方程組

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\mathbf{M}}{ds}&=\mathbf{e}_1,\\ \frac{d\mathbf{e}_1}{ds}&=\qquad k\mathbf{e}_2,\\ \frac{d\mathbf{e}_2}{ds}&=-k\mathbf{e}_1\qquad +w\mathbf{e}_3,\\ \frac{d\mathbf{e}_3}{ds}&=\qquad -w\mathbf{e}_2\end{aligned}\right\}\qquad(2\cdot 15)$$

必有这样的解，使得标形 $\mathbf{M}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ 例如当 $s=0$ 时重合 R_0.

这里在这样得到的依賴参数 s 的标形的运动中，設原点 $\mathbf{M}$ 所画的曲綫是 C，从 $(2\cdot 15)_1$ 看出 $\mathbf{e}_1$ 是它的单位切綫向量，从而 s 是它的弧长．并且从 $(2\cdot 15)_2$ 得知 $\mathbf{e}_2$ 是它的主法綫向量，$k(s)$ 是它的曲率；从 $(2\cdot 15)_3$ 还看到 $w(s)$ 是它的撓率．这样一来，証明了下面的基本定理 II：

基本定理 II 假設任意地給定了 C^1 級函数 $k(s)\geqslant 0$ 和連續函数 $w(s)$ $(0\leqslant s\leqslant L)$，那末以它們分別地做曲率和撓率的空間曲綫必存在.

我們也容易証明

基本定理 I 假如有两条曲綫 $C,\bar{C}$ 是具有同一的曲率 $k(s)\geqslant 0$ 和撓率 $w(s)$ $(0\leqslant s\leqslant L)$的，那末这两曲綫用运动可以重合.

把 $C,\bar{C}$ 固定在其上的点 $\mathbf{x}(0)$，$\bar{\mathbf{x}}(0)$ 的标形，而把这些标形用适当的运动分别地重合絕对标形 R_0，这样做是可能的．这时，設所获得的两曲綫是 C^*，$\bar{C}^*$，那末它們有相同的相对支量 $k(s)$ 和 $w(s)$，而且作为 $s=0$ 的初始条件的标形重合一致．所以从微分方

程的解的唯一性看出 C^* 与 $\bar{C}^*$ 完全一致。这表明了，C 与 $\bar{C}$ 是可用运动使它們完全重合。

这意味着在不計运动的情况下 C 和 $\bar{C}$ 是同一曲綫。就是說，如果对于动一动就可重合的物不加区别的話，这就表明了曲綫唯一地决定于它的曲率 $k(s)$ 和撓率 $w(s)$。

2·5 微分形式与結构方程

我們在 2·4 碰到了两个式

$$\sum a_{ji}\,da_{jk}, \quad \sum a_{ji}\,da_{j}.$$

这些式子是所謂微分形式。在本节里将叙述微分形式論来做过渡到曲面論的准备。以后非常多次地用到和的記号 $\sum$，所以把 $\sum$ 省略掉。倘使应該作和的指标在同一項中两回出現的話，必須看作为作和。

取 m 个独立的实变数 $u_1, u_2, \cdots, u_m$；它們的常系数而不含有常数項的一次式即形如

$$f(u) = a_\lambda u_\lambda \equiv \sum_{\lambda=1}^{m} a_\lambda u_\lambda$$

的式子，称为**一次形式**。又常系数而不含有一次項和常数項的二次式即形如

$$f(u, u) = a_{\lambda\mu} u_\lambda u_\mu \equiv \sum_{\lambda,\mu=1}^{m} a_{\lambda\mu} u_\lambda u_\mu$$

的式子，称为**二次形式**。形式这个术語意味着所論的式子关于变数是同次項的和。設 $m=3$ 并且把 u_1, u_2, u_3 看作为空間的笛卡儿坐标系。当一次形式等于 0（或等于非 0 的常数）时，表示了通过原点的平面（或不过原点的平面）；又当二次形式等于 0（或等于非 0 的常数）时，如果 $|a_{ij}| \neq 0$，它表示了以原点为頂点的圓錐（或以原点为中心的二次曲面）；如果 $|a_{ij}| = 0$，它表示了通过原点的两平面或两張重合做一張的平面（或两張不过原点的平行平面）。

这些事实从解析几何都可明了.

可是，讀者們在解析几何中的二次曲綫和二次曲面的配极理論里,想必都碰到过形如

$$\sum a_{\lambda\mu}u_\lambda v_\mu$$

的式子,尽管那里的 $m=3$. 現在,設 $u_1,\cdots,u_m$, $v_1,\cdots,v_m$ 表示两組变数. 由于这种式子无論关于 $u_1,\cdots,u_m$ 或关于 $v_1,\cdots,v_m$ 都是一次形式,称它为**双一次形式**.

提起双一次形式，一般地 $a_{\lambda\mu}$ 可以是任意的，特别是当系数滿足

$$a_{\lambda\mu}=-a_{\mu\lambda}$$

这組条件时,可以写做下列形式:

$$\sum_{(\lambda,\mu)}a_{\lambda\mu}(u_\lambda v_\mu-u_\mu v_\lambda),$$

称为**外二次形式**. 这里 $\sum\limits_{(\lambda,\mu)}$ 表示关于 $\lambda\neq\mu$ 的每一数組 (λ,μ) 作和的意义.

在外二次形式里虽有 u_λ, v_λ 的两組变数，但是只用其中一組 u_λ 把它写成

$$\sum_{(\lambda,\mu)}a_{\lambda\mu}[u_\lambda u_\mu],$$

这是經常慣用的写法.

对于两个一次形式

$$f(u)=a_\lambda u_\lambda,\quad g(u)=b_\lambda u_\lambda,$$

定义

$$(f+g)(u)=(a_\lambda+b_\lambda)u_\lambda$$

为其和. 两个二次形式和两个双一次形式的和同样地意味着以其系数的和做系数的形式.

現在,从两个一次形式

$$f(u)=\sum_{\lambda=1}^{m}a_\lambda u_\lambda,\quad g(u)=\sum_{\lambda=1}^{m}b_\lambda u_\lambda$$

可以作出外二次形式．这决定于

$$f(u)g(v)-f(v)g(u)=\begin{vmatrix} a_\lambda u_\lambda & b_\mu u_\mu \\ a_\lambda v_\lambda & b_\mu v_\mu \end{vmatrix}=a_\lambda b_\mu[u_\lambda u_\mu],$$

称它为 f, g 的**外积**,并記做 $[fg]$.

容易看出下列关系的成立:

$$[afg]=a[fg] \quad (a\text{ 常数})$$

$$[f_1+f_2,\ g]=[f_1g]+[f_2g],$$

$$[fg]=-[gf].$$

假設 p 个一次形式

$$f_\alpha=\sum a_{\alpha\lambda}u_\lambda, \quad \alpha=1,2,\cdots,p$$

对于所有的 $u_1,\cdots,u_m$ 恒等地满足

$$c_1f_1+c_2f_2+\cdots+c_pf_p=0,$$

其中 $c_1,\cdots,c_p$ 表示不同时为 0 的常数,那末称这 p 个形式是**綫性相关**．反之,当这种常数 $c_1,\cdots,c_p$ 不存在时,称为**綫性独立**．如果 $p>m$, $f_1,f_2,\cdots,f_p$ 一定是綫性相关的．当 $p\leqslant m$ 时,为了它們綫性独立的充要条件是:从它們的系数所作出的方陣

$$(a_{\alpha\lambda}), \quad \alpha=1,2,\cdots,p;\ \lambda=1,2,\cdots,m$$

的秩数等于 p．这是代数学所述的内容.

关于外二次形式最基本的重要定理就是被称为 Cartan 引理的定理.

引理(Cartan) 假設 $2p(1\leqslant p\leqslant m)$ 个一次形式

$$f_1,f_2,\cdots,f_p$$

$$g_1,g_2,\cdots,g_p$$

之間成立关系式

$$[f_1g_1]+[f_2g_2]+\cdots+[f_pg_p]\equiv 0.$$

如果 $f_1,f_2,\cdots,f_p$ 是綫性独立的,那末成立关系

$$g_\alpha=\sum_{\beta=1}^{p}a_{\alpha\beta}f_\beta,\quad a_{\alpha\beta}=a_{\beta\alpha}.$$

这就是說，g_α 是 $f_1, \cdots, f_p$ 的綫性組合，并且它的系数的方陣是对称的。

証明 $p=m$ 的时候。由于这时 f_α 是綫性独立，u_α 是可用 f_α 的綫性組合来表达的，从而 g_α 也可用 f_α 的綫性組合来表达。置

$$g_\lambda=\sum_{\mu=1}^{m}a_{\lambda\mu}f_\mu\quad(\lambda,\ \mu=1,\ \cdots,\ m).$$

可是

$$\sum_{\lambda=1}^{m}[f_\lambda g_\lambda]=\sum_{\lambda,\mu=1}^{m}a_{\lambda\mu}[f_\lambda f_\mu],$$

而且右式中的 $[f_\lambda f_\mu]$ 关于 λ, μ 是斜对称的，

$$\sum_{\lambda=1}^{m}[f_\lambda g_\lambda]=\sum_{(\lambda,\mu)}(a_{\lambda\mu}-a_{\mu\lambda})[f_\lambda f_\mu],$$

式中 $\sum_{(\lambda,\mu)}$ 表示关于 $1, 2, \cdots, m$ 中的每对不同数字的和。因此，从假設

$$\sum[f_\lambda g_\lambda]=0$$

立刻看出

$$a_{\lambda\mu}=a_{\mu\lambda}.$$

$p<m$ 的时候。对給定的 $f_1, \cdots, f_p$ 添加 $(m-p)$ 个 $f_{p+1}, \cdots, f_m$，使 $f_1, \cdots, f_m$ 变为綫性独立的一次形式。这样一来，根据假設成立

$$[f_1g_1]+\cdots+[f_pg_p]+[f_{p+1}0]+\cdots+[f_m0]=0.$$

因为这是在 $p=m$ 的情况下置

$$g_{p+1}=0,\quad \cdots,\quad g_m=0$$

的特殊状态，那末成立

$$g_\lambda=\sum a_{\lambda\mu}f_\mu,\quad a_{\lambda\mu}=a_{\mu\lambda}.$$

可是从 $g_{p+1}=0, \cdots, g_m=0$ 得到

$$a_{p+1\,\mu}=0, \quad \cdots, \quad a_{m\mu}=0,$$

所以看出

$$g_\alpha=\sum_{\beta=1}^{p} a_{\alpha\beta} f_\beta, \quad a_{\alpha\beta}=a_{\beta\alpha}. \qquad \text{(証毕)}$$

作为特殊情况，如果

$$[f_1 f_2]=0, \tag{2·16}$$

那末成立

$$f_2=a f_1. \tag{2·17}$$

就是 f_1, f_2 是綫性相关的. 反过来，当(2·17)成立时，很明显地成立(2·16).

当 m 个变数 $u_1, \cdots, u_m$ 各各独立地从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 改变时，把这些数值組 $(u_1, \cdots, u_m)$ 看做一点，而且把 $\sum(u_\lambda-u_\lambda^0)^2<\varepsilon$ 的点 u_λ 的集看做点 u_λ^0 的邻域，这是可以称为广义空間的，我們称它为 **m 維数的空間**. 在叙述数学分析事項的时候，采用几何术語往往較为方便. 在 m 維数的空間的領域 D 里定义坐标的微分 du_λ，以 u_λ 的函数做系数作出这些 du_λ 的一次形式，称为**一次微分形式**或者 **Pfaff 形式**. 这是在上述的以常数为系数的变数 u_λ 的一次形式里，用 du_λ 代替 u_λ 而且用 u_λ 的函数代替常系数之后得来的，关于代数方面的事項如前所述同样地成立.

微分 $(du_1, \cdots, du_m)$ 可以看成是在数的空間 $(u_1, \cdots, u_m)$ 里表达了从点 u_λ 朝向点 $u_\lambda+du_\lambda$ 的无穷小向量. 这样，从点 u_λ 也可考察发出的其他无穷小向量 $(\delta u_1, \cdots, \delta u_m)$. 为了表达一个微分形式

$$\omega=a_\lambda(u)\,du_\lambda, \tag{2·18}$$

按照所对应的无穷小向量是 du_λ 或 δu_λ 而分别記作

$$\omega(d)=a_\lambda(u)\,du_\lambda,$$

$$\omega(\delta)=a_\lambda(u)\,\delta u_\lambda.$$

同样地可以定义二次微分形式

$$a_{\lambda\mu}(u)\,du_\lambda\,du_\mu$$

和双一次微分形式

$$a_{\lambda\mu}(u)\,du_\lambda\delta u_\mu.$$

特别是，当这里各系数是斜对称就是满足

$$a_{\lambda\mu}=-a_{\mu\lambda}$$

的条件时，称这双一次形式为二次**外微分形式**. 还可以改写它为

$$\sum_{(\lambda,\mu)}a_{\lambda\mu}(du_\lambda\delta u_\mu-du_\mu\delta u_\lambda)=\sum_{(\lambda,\mu)}a_{\lambda\mu}[du_\lambda\,du_\mu].$$

当給定两个一次微分形式时，

$$\omega_1=a_\lambda du_\lambda,\quad \omega_2=b_\lambda\,du_\lambda,$$

从此定义它們的**外积**为下列的外微分形式$[\omega_1\omega_2]$：

$$\begin{aligned}[\omega_1\omega_2]&\equiv\omega_1(d)\,\omega_2(\delta)-\omega_1(\delta)\,\omega_2(d)\\&=a_\lambda b_\mu(du_\lambda\delta u_\mu-\delta u_\lambda\,du_\mu)\\&=\frac{1}{2}\sum_{(\lambda,\mu)}(a_\lambda b_\mu-a_\mu b_\lambda)\,[du_\lambda\,du_\mu].\end{aligned}$$

很明显地成立下列关系：

$$\left.\begin{aligned}&[\omega\omega]=0,\\&[\omega_1\omega_2]=-[\omega_2\omega_1],\\&[\omega_1+\omega_2,\ \omega]=[\omega_1\omega]+[\omega_2\omega],\\&[(a\omega_1)\,\omega_2]=a[\omega_1\omega_2].\end{aligned}\right\}\tag{2·19}$$

設

$$\omega=a_\lambda(u)\,du_\lambda\tag{2·20}$$

是給定的微分形式，从此就有作出二次微分形式的操作. 这就是按照

$$\begin{aligned}\omega'&\equiv[da_\lambda du_\lambda]\\&=\frac{\partial a_\lambda}{\partial u_\mu}[du_\mu\,du_\lambda]\\&=\frac{1}{2}\sum_{(\lambda,\mu)}\left(\frac{\partial a_\lambda}{\partial u_\mu}-\frac{\partial a_\mu}{\partial u_\lambda}\right)[du_\mu\,du_\lambda]\end{aligned}$$

所定义的 ω' 和 ω 相对应的操作，称 ω' 为 ω 的**外微商**。

容易驗証

$$\left.\begin{aligned}(\omega_1+\omega_2)'&=\omega_1'+\omega_2',\\ (f\omega)'&=[df\omega]+f\omega',\end{aligned}\right\} \tag{2·21}$$

式中 f 表示 u_λ 的函数.

如果存在函数 $f(u_1,\cdots,u_m)$ 使微分形式(2·18)变为 $\omega=df$，那末就称它为**零形式**. 由于这时成立

$$a_\lambda(u)=\frac{\partial f}{\partial u_\lambda}, \tag{2·22}$$

很明显，$\omega'=0$.

反过来，如果对于(2·18)成立 $\omega'=0$，那末一定要成立

$$\frac{\partial a_\lambda}{\partial u_\mu}=\frac{\partial a_\mu}{\partial u_\lambda}.$$

根据数学分析的定理，在这时候必有函数 $f(u_1,\cdots,u_m)$ 使(2·22)成立. (但是假定微分形式 ω 的定义領域 D 是单連通的. 如果不是单連通，那末只在单連通的部分領域内成立.) 在这意义下，$\omega'=0$ 是 ω 要变为零形式的充要条件.

外微商的定义不仅对一次微分形式而且对其他微分形式也是可行的. 例如，如果把函数 $f(u_1,\cdots,u_m)$ 看做 0 次微分形式，那末 df 可以看成是 f 的外微商. 又假設二次微分形式

$$\omega=\sum_{(\lambda,\mu)}a_{\lambda\mu}(u)\,[du_\lambda\,du_\mu]$$

的外微商意味着

$$\omega'=\sum_{(\lambda,\mu)}[da_{\lambda\mu}\,du_\lambda\,du_\mu]. \tag{2·23}$$

我們改写它如次：

$$\omega'=\sum_{(\lambda,\mu,\nu)}a_{\lambda\mu\nu}[du_\lambda\,du_\mu\,du_\nu],$$

$$a_{\lambda\mu\nu}=\frac{1}{3}\left(\frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial u_\nu}+\frac{\partial a_{\mu\nu}}{\partial u_\lambda}+\frac{\partial a_{\nu\lambda}}{\partial u_\mu}\right).$$

($a_{\lambda\mu\nu}$ 关于任何两指标是斜对称的.)

如上所説明,

$$(df)'=0.$$

同样,設 $\omega=a_\lambda\, du_\lambda$ 是一次微分形式,就有

$$(\omega')'=\left(\frac{\partial a_\lambda}{\partial u_\mu}[du_\mu\, du_\lambda]\right)'$$

$$=\frac{\partial^2 a_\lambda}{\partial u_\mu \partial u_\nu}[du_\nu\, du_\mu\, du_\lambda]=0.$$

一般地可以証明:对任意次数的外微分形式 ω 必成立

$$(\omega')'=0. \tag{2·24}$$

我們已經看到,表达标形的无穷小变位的微分形式 ω_i, ω_{ij} 决定于

$$\omega_i=a_{ji}\, da_j,$$

$$\omega_{ik}=-a_{ji}\, da_{jk}.$$

从这些形式看出

$$\omega_i'=[da_{ji}\, da_j],$$

$$[\omega_j\omega_{ji}]=-[a_{lj}\, da_l,\ a_{kj}\, da_{ki}]$$

$$=a_{kj}a_{lj}[da_{ki}\, da_l]$$

$$=[da_{ki}\, da_k],$$

从而成立关系

$$\omega_i'=[\omega_j\omega_{ji}]. \tag{2·25}$$

又从

$$(\omega_{ij})'=-[da_{hi}\, da_{hj}],$$

$$[\omega_{ik}\omega_{kj}]=-[\omega_{ki}\omega_{kj}]$$

$$=-[a_{hk}\, da_{hi},\ a_{lk}\, da_{lj}]$$

$$=-[da_{hi}\, da_{hj}]$$

导出关系式

$$(\omega_{ij})'=[\omega_{ik}\omega_{kj}]. \tag{2·26}$$

現在，从表示标形 R_{a+da} 关于 R_a 的相对位置的方程

$$d\mathbf{M}=\omega_i\mathbf{e}_i,$$
$$d\mathbf{e}_i=\omega_{ij}\mathbf{e}_j,\quad \omega_{ij}+\omega_{ji}=0$$

作出 $(d\mathbf{M})'$；根据 $(2\cdot21)_2$

$$\begin{aligned}(d\mathbf{M})'&=\omega_i'\mathbf{e}_i+[d\mathbf{e}_i\omega_i]\\&=(\omega_i'+[\omega_{ji}\omega_j])\mathbf{e}_i,\end{aligned}$$

所以 (2·25) 与

$$(d\mathbf{M})'=0$$

是等价的．又因为

$$\begin{aligned}(d\mathbf{e}_i)'&=\omega_{ij}'\mathbf{e}_j+[d\mathbf{e}_j\omega_{ij}]\\&=(\omega_{ij}'+[\omega_{kj}\omega_{ik}])\mathbf{e}_j,\end{aligned}$$

同样地看出，(2·26) 与

$$(d\mathbf{e}_i)'=0$$

是等价的．从而由上面所述 $d\mathbf{M}$, $d\mathbf{e}_i$ 都是零形式．这就是說，运用于 $\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{e}_i$ 的演算 d 是普通意义下的微分．

(2·25)，(2·26) 两式一并称为（运动群的）**結构方程**（(2·26) 又称为旋轉群的結构方程），是頗为重要的公式．現在，在这里沒有条件来作詳細討論，仅仅指出：滿足这两式的互相独立的六个 Pfaff 形式 ω_i, $\omega_{ij}(i<j)$ $(\omega_{ji}=-\omega_{ij})$ 确定运动群本身，在这意义下給定結构方程和給定运动群是等价性质的两件事．

运动群依賴六个参数．从运动群中选出若干个参数，例如两个参数有关的运动，就是选出那些可以写成 $a_{ij}(u,v)$，$a_i(u,v)$ 的运动，很明显地結构方程照旧成立．

我們在数学分析里虽然不用外微分形式的名称，但也碰到外微分形式．例如，在平面上考察一条曲綫 C 和沿它的綫积分

$$\int_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

的时候，$P\,dx+Q\,dy$ 就是这形式．又二重积分

$$\iint f(x, y)\,dx\,dy$$

中的 $f(x, y)\,dx\,dy$ 也是这形式．这时 $dx\,dy$ 并不是微分 dx 与 dy 的普通意义的乘积，而是应該解释为两微分形式 dx, dy 的外积 $[dx\,dy]$ 的意义．

为闡明这个事实，在变数变换

$$x=\phi(u, v), \quad y=\psi(u, v),$$

$$J=\frac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(u, v)}\neq 0$$

之后，就有

$$\iint f(x, y)\,dx\,dy=\iint f(x(u, v), y(u, v))\,J\,du\,dv;$$

这个著名定理說明了这点．这是因为，

$$[dx\,dy]=[\phi_u\,du+\phi_v\,dv, \psi_u\,du+\psi_v\,dv]$$
$$=J[du\,dv].$$

关于三重积分 $\iiint f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$ 也是同样的．特别是，从此看出：求平面图形面积的积分 $\iint dx\,dy$ 和求空間体积的积分 $\iiint dx\,dy\,dz$ 也都是外微分形式的积分．

假設在平面上由单純閉曲綫 C 圍成的領域是 D，函数 $P(x,y)$, $Q(x, y)$ 在那里都是 C' 級．从 Green 定理看出成立重要的关系式

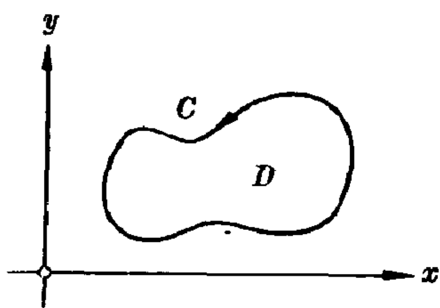


图 2·10

$$\int_C P\,dx+Q\,dy=\int_D (Q_x-P_y)\,dx\,dy.$$

如果置

$$\omega = P\,dx + Q\,dy,$$

由于

$$\omega' = (Q_x - P_y)[dx\,dy],$$

上式可以改写为

$$\int_C \omega = \int_D \omega',$$

式中 C 是 D 的境界．同此相类似的关系在空間也成立，而被称为 Stokes 定理．这样，微分形式的理論与数学分析直接发生了关系，并且近年来在它与微分方程、李群論、拓扑学、調和积分論的关系問題上，逐漸看到它的重要性．

【习题】

1．設 f 是变数 $u_1, u_2, \cdots, u_m$ 的二次外形式，証明

$$\sum u_\lambda \frac{\partial f}{\partial u_\lambda} = 0, \quad \sum\left[u_\lambda \frac{\partial f}{\partial u_\lambda}\right] = 2f.$$

2．証明变数 $u_1, u_2, \cdots, u_m$ 的二次外形式可以写成

$$[\phi_1\phi_2] + [\phi_3\phi_4] + \cdots + [\phi_{2p-1}\phi_{2p}] \quad (2p \leqslant m)$$

的形状．式中假定了 $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_{2p}$ 是互相独立的一次形式．

3．設 P, Q, R 是 x, y, z 的函数，求

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz, \quad P[dy\,dz] + Q[dz\,dx] + R[dx\,dy]$$

的外微商．

4．設 ω_1 是 r 次外微分形式，証明

$$[\omega_1\omega_2]' = [\omega_1'\omega_2] + (-1)^r[\omega_1\omega_2'].$$

第3章 曲 面 論

3·1 曲面的参数表示．切平面与綫素

为了討論空間里擁着的曲面，在微积分里普通采用以直交笛卡儿坐标系 x, y, z 为参考而記作 $z=f(x, y)$ 的表示法．这个表示法关于三个坐标 x, y, z 不是对称的，而且在曲面的切平面垂直于 xy 平面的地方 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$ 等变为 ∞，显得不利．又形如 $F(x, y, z)=0$ 的方程除了代数曲面或者特殊曲面而外，也不能說是方便的．

在微分几何里，为解析地表示曲面，設 x_1，x_2，x_3 表示直交笛卡儿坐标系，用在 u, v 平面的某領域 D 里定义起来的三个函数 $x_i(u, v)$ 做曲面的表示

$$x_i=x_i(u, v), \quad (u, v)\in D, \tag{3·1}$$

要算是最方便的．因为我們討論的是光滑曲面，假定每一个 $x_i(u,v)$ 都是关于 u，v 有必要阶数可微分而且微商也是連續的．（普通假定到三阶为止，就是 C^3 級函数就够了．）在这里还假定三个函数行列式

$$\Delta_1\equiv\frac{\partial(x_2, x_3)}{\partial(u, v)}, \quad \Delta_2\equiv\frac{\partial(x_3, x_1)}{\partial(u, v)}, \quad \Delta_3\equiv\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(u, v)}$$

不同时等于 0，就是

$$\Delta_1^2+\Delta_2^2+\Delta_3^2\neq 0. \tag{3·2}$$

式中已置

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_2}{\partial u} & \dfrac{\partial x_3}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial v} & \dfrac{\partial x_3}{\partial v} \end{vmatrix} \equiv \frac{\partial(x_2, x_3)}{\partial(u, v)}.$$

(理由叙述于后.) 用满足这样条件的 C^r 級函数定义起来的曲面 (3·1), 称为 **C^r 級曲面**;这样的曲面的解析表示法,称为 **Gauss 的参数表示.**

三个函数行列式不同时等于 0 这个假定是对曲面本身的假定,也是对参数表示的假定. 这是因为,即使取适当的参数表示使这假定满足, 在同一曲面的别种参数表示里还会发生这假定不能满足的情况. 例如, (x_1, x_2) 平面决定于 $x_1=u$, $x_2=v$, $x_3=0$. 这时, $\Delta_3=1$. 但是, 如果把同一平面表示为 $x_1=u^3$, $x_2=v^3$, $x_3=0$, 那末在原点 Δ_1, Δ_2, Δ_3 同时等于 0.

設 $(u_0, v_0)\in D$, 曲面 S 上必有坐标是 $x_i\,(u_0, v_0)$ 的一点 $\mathbf{x}_0$. 根据假定, 三个函数行列式在 D 的任何点都不同时等于 0, 所以在点 (u_0, v_0) 也必有不是 0 的. 因为无論是哪一个都是一样, 我們假定在点 (u_0, v_0),

$$\Delta_3=\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(u, v)}\neq 0. \tag{3·3}$$

这样, 很明显地 (3·3) 在 D 中 (u_0, v_0) 的适当小邻域內成立. 設这样的邻域是 U. 从微积分的隐函数理論看出, (u, v) 平面的邻域 U 的点与按照

$$x_1=x_1(u, v), \quad x_2=x_2(u, v)$$

对应起来的 (x_1, x_2) 平面的对应領域 V 的点之間成立一对一的連續对应. 因此, 关于 (u, v) 可以解上列方程, 而得到

$$u=u(x_1, x_2), \quad v=v(x_1, x_2).$$

代入 (3·1), 便有

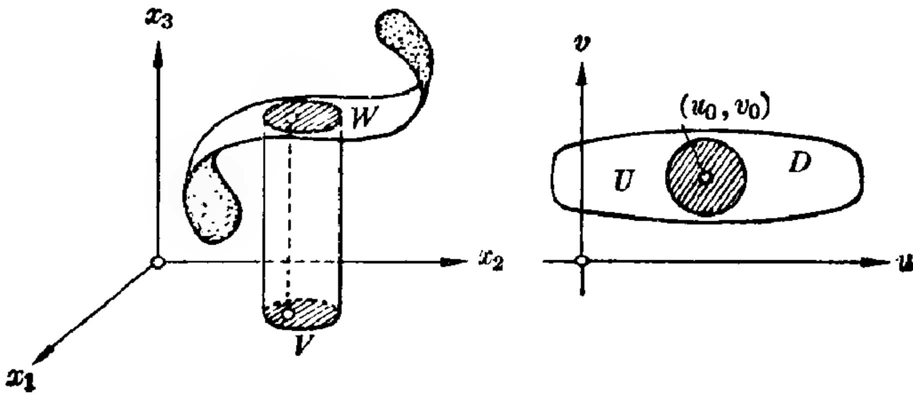


图 3·1

$$x_3 = x_3(x_1, x_2).$$

所以在 S 上对应于 D 的部分 W 与 U 做成一对一的連續对应。

在 U 内考察同 u 軸平行的直綫 $v=v_0$（v_0 常数）。在 S 的一部分的 W 上对应于它的曲綫

$$x_i = x_i(u, v_0)$$

因而产生．称这曲綫为 u **曲綫**．当然，v_0 的值可取为种种数值。同样，在 W 上对应于 $u=u_0$ 的曲綫，称为 v **曲綫**．u 曲綫和 v 曲綫总称为**参数曲綫**。

同样的討論在 $\Delta_3=0$ 而 Δ_1 或 Δ_2 不是 0 的时候也成立。

很明显，u 曲綫 $v=v_0$ 在点 (u_0, v_0) 的切綫向量是以

$$\frac{\partial x_1}{\partial u}, \quad \frac{\partial x_2}{\partial u}, \quad \frac{\partial x_3}{\partial u}$$

在 (u_0, v_0) 的值为其支量的．同样，v 曲綫 $u=u_0$ 在同一点的切綫向量的支量是

$$\frac{\partial x_1}{\partial v}, \quad \frac{\partial x_2}{\partial v}, \quad \frac{\partial x_3}{\partial v}$$

在 (u_0, v_0) 的值．我們用 $\mathbf{x}_u$，$\mathbf{x}_v$ 分别表示这两向量．当以点 $\mathbf{x}(u_0, v_0)$ 为始点画出两向量 $\mathbf{x}_u$，$\mathbf{x}_v$ 时，它們不在一直綫上的事实从 Δ_1，Δ_2，Δ_3 不同时为 0 的假定就可明了。

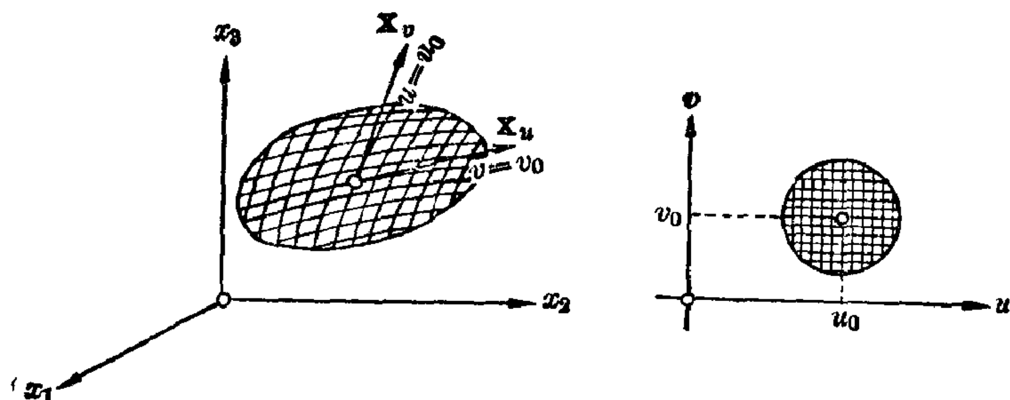


图 3·2

因此，对于 D 上的各直綫 $v=v_0$ 就有 S 上的对应的 u 曲綫；对于 D 上的各直綫 $u=u_0$ 就有 S 上的对应的 v 曲綫. 如果 S 和本身不相交，那末可以看出这些曲綫在 S 上編成一网，而且网的經緯无論在哪一个交点所成的角都不是 0. 即使在 S 和本身相交的时候，只要考察 S 上对应于 D 內各点的适当小邻域的小曲面片，也是有同样的結果.

例 以原点为中心的半徑 a 的球面具有下列的参数表示:

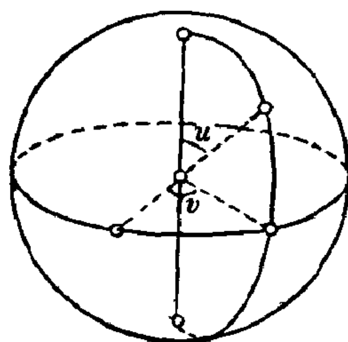


图 3·3

$$x_1=a\sin u\cos v,$$

$$x_2=a\sin u\sin v,$$

$$x_3=a\cos u.$$

这里，v 曲綫是平行环，而且 u 曲綫是子午綫.

南北两极是这种参数表示的奇异点(三个函数行列式都是 0).

現在，曲面上的曲綫可以表成作为 D 上的曲綫

$$u=u(t),\quad v=v(t),\quad a\leqslant t\leqslant b \tag{3·4}$$

的象，就是决定于

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}(u(t),\ v(t)). \tag{3·5}$$

在点 $\mathbf{x}(u(t),\ v(t))$ 的切綫向量是

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{x}_u\frac{du}{dt}+\mathbf{x}_v\frac{dv}{dt}. \tag{3·6}$$

这式表明，在点 $\mathbf{x}(u(t), v(t))$ 的切綫向量落在点 $\mathbf{x}(u(t), v(t))$ 的两向量 $\mathbf{x}_u$, $\mathbf{x}_v$ 所撑成的平面内. 从这个事实看出，当固定这点 $\mathbf{x}(u, v)$ 而考察通过它的任意曲綫时，这些曲綫在点 $\mathbf{x}(u, v)$ 的切綫全部落在 $\mathbf{x}_u$, $\mathbf{x}_v$ 所撑成的同一平面内. 我們称这張平面为在点 $\mathbf{x}(u, v)$ 的**切平面**. 它的方程是

$$|\mathbf{X}-\mathbf{x}(u, v)\ \ \mathbf{x}_u\ \ \mathbf{x}_v|=0. \tag{3·7}$$

提到切平面，因为我們只看惯了球面的切平面等，难免要想象曲面总是趟在它的切平面的一侧，但是不一定是这样. 图 3·4 是表示了单叶双曲面上在其一点的切平面，而曲面被这切平面所切断.

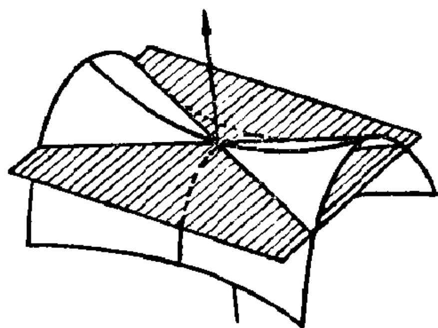


图 3·4

通过点 $\mathbf{x}(u, v)$ 而且在这点垂直于切平面的直綫，称为**法綫**. 选取它的方向使与 $\mathbf{x}_u$, $\mathbf{x}_v$ 做成右手制，并且設这方向的单位向量是 $\mathbf{e}_3$，就有

$$\mathbf{e}_3=\frac{\mathbf{x}_u\times\mathbf{x}_v}{\sqrt{(\mathbf{x}_u\times\mathbf{x}_v)^2}}. \tag{3·8}$$

如果写下

$$E=\mathbf{x}_u^2,\quad F=\mathbf{x}_u\mathbf{x}_v,\quad G=\mathbf{x}_v^2, \tag{3·9}$$

又可改写上式为

$$\mathbf{e}_3=\frac{\mathbf{x}_u\times\mathbf{x}_v}{\sqrt{EG-F^2}}. \tag{3·10}$$

当然，

$$EG-F^2=(\mathbf{x}_u\times\mathbf{x}_v)^2=\Delta_1^2+\Delta_2^2+\Delta_3^2>0. \tag{3·11}$$

曲面 S 上的曲綫

$$u=u(t),\quad v=v(t),\quad a\leqslant t\leqslant b$$

决定于

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}(u(t),\ v(t)),$$

从而

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{x}_u\dot{u}+\mathbf{x}_v\dot{v}, \tag{3·12}$$

所以这曲綫的弧长决定于

$$l=\int_a^b\sqrt{\dot{\mathbf{x}}^2}\,dt=\int_a^b\sqrt{E\dot{u}^2+2F\dot{u}\dot{v}+G\dot{v}^2}\,dt, \tag{3·13}$$

因此,曲綫的弧长是

$$s=\int_a^t\sqrt{E\dot{u}^2+2F\dot{u}\dot{v}+G\dot{v}^2}\,dt. \tag{3·14}$$

特别是,对应于 t, $t+\Delta t$ 的两点間的弧长是

$$\Delta s=\int_t^{t+\Delta t}\sqrt{E\dot{u}^2+2F\dot{u}\dot{v}+G\dot{v}^2}\,dt.$$

当 Δt 是充分小时,把 Δt 的高次項略而不計,并且記它作 ds, 便得到

$$(ds)^2=(E\dot{u}^2+2F\dot{u}\dot{v}+G\dot{v}^2)\,\Delta t^2.$$

置 $\Delta t=dt$, $du=\dot{u}dt$, $dv=\dot{v}dt$, 就可写下

$$ds^2=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2. \tag{3·15}$$

我們尽可把 ds 看作曲面上无限邻近的两点 (u,v), $(u+du,v+dv)$ 間的距离.

称 ds 为曲面的**綫素**. 又称下式:

$$E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2$$

为曲面的**第一基本微分形式**, 这是曲面的理論中的重要式. 看来好象不用什么微分形式, 而只依靠 E, F, G 也可解决問題似的, 但是不仅用到 E, F, G 而也用到微分形式, 其理由是: 微分形式是 ds^2 即具有几何意义下的长度这种与参数选擇无关的不变量. 至于 E, F, G 却随着参数的更改而变动.

第一基本形式具有一个显著的性质. 这就是: 从几何方面可

以明了，这个形式对于同时取 0 值以外的实数值 du, dv 恒取正值．这样的二次形式称为**正定值**的二次形式．顺便提到，当 du, dv 不同时为 0 时，恒取負值的二次形式，称为**負定值**的；取正、負双方数值的二次形式，称为**不定值**的．讀者們容易看出，对于二次形式 $ax^2+2hxy+by^2$ 成立

正定值：　　$h^2-ab<0,\quad a>0;$

負定值：　　$h^2-ab<0,\quad a<0;$

不定值：　　$h^2-ab>0.$

如果

$$ax^2+2hxy+by^2=1$$

的左边是正定值，它表示椭圓；如果 $h^2-ab>0$，則表示双曲綫，这些都是在解析几何里学过的．

【习題】

1．設一动直綫(称为**母綫**)与一条定直綫直交，而且按某一規律变动，由这动直綫的集做成的曲面称为正劈錐面(right conoid)．导出它的方程 $x_1=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=\phi(v)$，并証明当 $\phi(v)=a\cot v+b$ (a, b 常数) 时，它是双曲抛物面．

2．設正劈錐面是由 $\phi(v)=a\sin 2v$ 定义的．証明这曲面的切平面和曲面相交于椭圓．又証从空間的任意一点向母綫引垂綫，这些垂足画成椭圓．

3．算出正劈錐面的綫素 ds^2．

3·2 一阶标形．第二基本微分形式

同曲綫論的时候一样，在曲面論里也考察曲面在其各点和它具有最密切关系的标形，而且关于这标形表达所論点的邻域并討論标形的相对位置，这应当是便利的事情．

首先从几何方面討論这个問題，在曲面 S 上的点 $\mathbf{x}$ 选取 $\mathbf{x}$ 的法綫向量 $\mathbf{e}_3$ 做标形的三脚之一，完全是自然的．从而，$\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ 都落在点 $\mathbf{x}$ 的切平面内．但是，在切平面内究竟怎样选取 $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ 呢?

在曲綫論里用弧长 s 表达 Frenet 标形的三脚的时候，我們有

$$\xi_1=\mathbf{x}',\quad \mathbf{x}''=k\xi_2,\quad \xi_3=\xi_1\times\xi_2.$$

由于从几何看来 ξ_1 是切綫，ξ_2 在密切平面內而且垂直于 ξ_1，无論分析上或几何上都是非常便利的标形．可是在曲面論的时候象这种便利的标形不复存在，如果我們从分析方面着手，应用微积分的知識来进行討論的話，就应当选取参数曲綫的切綫向量 $\mathbf{x}_u$，$\mathbf{x}_v$ 作为 $\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$，这样，就不得不把构成标形的向量 $\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$，$\mathbf{e}_3$ 的直交性质和单位向量的性质放弃几个．另一方面，如果不放弃这些而想一直应用和曲面最密切关联着的直交标形进行討論的話，尽管从几何方面看来这是优越的方法，但在分析上按照到現在的微积分知識看来，必須采用稍为改变过的方法才能解决問題．

普通微分几何书籍里采用的方法是这里所讲的第一种方法．每个活动标形既不是直交标形，它和欧几里得几何所特有的运动群之間的联系变为微薄，并且活动标形理論也失去作用．我們在本书里要用活动标形理論为中心来进行討論，所以就决定采用第二种方法．

設 $\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$ 是在曲面 S 的点 $\mathbf{x}$ 的切平面內而且通过 $\mathbf{x}$ 的互相垂直的单位向量，$\mathbf{e}_3$ 是在(3·8)所述的法綫单位向量，其中成立

$$\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2=\mathbf{e}_3. \tag{3·16}$$

当給定这样的一个标形 $\mathbf{x}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ 时，把它繞 $\mathbf{e}_3$ 軸的周圍旋轉，仍旧保持同一性质，所以它依賴这旋轉角 θ 和参数 u，v 等三个参数．我們称在曲面上的各点这样地由 $\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$ 撑成切平面的活动标形为**一阶标形**．为了把絕对标形 R_0 移到这些标形，所需的运动

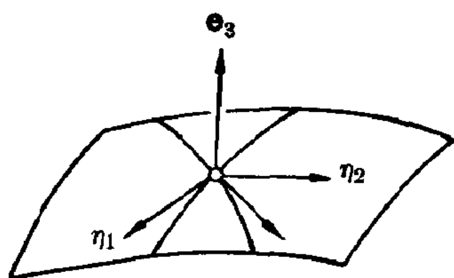


图　3·5

$$x_i'=\sum a_{ik}x_k+a_i$$

的系数 a_{ik}，a_i 都是 u，v，θ 的可微

分函数．实际上，設在点 $\mathbf{x}(u, v)$ 的 $\mathbf{x}_u$ 方向的单位向量是 η_1，法綫单位向量是 $\mathbf{e}_3$，并置

$$\eta_2 = \mathbf{e}_3 \times \eta_1. \tag{3·17}$$

很明显，把絕对标形 R_0 移到 $\mathbf{x}\eta_1\eta_2\mathbf{e}_3$ 的运动是

$$x_i' = b_{ik}x_k + b_i,$$

式中

$$(b_{ik}(u, v)) = \begin{pmatrix} \eta_{11} & \eta_{21} & e_{31} \\ \eta_{12} & \eta_{22} & e_{32} \\ \eta_{13} & \eta_{23} & e_{33} \end{pmatrix}, \tag{3·18}$$

$$b_i(u, v) = x_i(u, v). \tag{3·19}$$

在这里 η_{1i}, η_{2i}, e_{3i} 分别表示 η_1, η_2, $\mathbf{e}_3$ 的支量．这些都是 u, v 的可微分函数．如果把这标形繞 $\mathbf{e}_3$ 軸的周圍旋轉一个角度 θ，那末把 R_0 移到这样得到的标形的变換决定于

$$x_i' = b_{ij}(u, v)c_{jk}x_k + b_i(u, v),$$

其中已置

$$(c_{ij}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3·20}$$

因此，置

$$\left.\begin{aligned} a_{ik}(u, v, \theta) &= b_{ij}(u, v)c_{jk}(\theta), \\ a_i(u, v, \theta) &= b_i(u, v), \end{aligned}\right\} \tag{3·21}$$

就获得把 R_0 移到所論标形族的变換

$$x_i' = a_{ik}x_k + a_i.$$

从此可見，这些标形間的相对支量是从(3·21)代入

$$\left.\begin{aligned} \omega_{ik} &= -a_{ji}da_{jk}, \\ \omega_i &= a_{ji}da_j \end{aligned}\right\} \tag{3·22}$$

以后得出的关于 u, v, θ 的 Pfaff 形式．

关于这些标形的一族只要注意到 $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ 撑成在点 $\mathbf{x}(u, v)$ 的切平面,便看出

$$\left.\begin{aligned} d\mathbf{x} &= \omega_1\mathbf{e}_1+\omega_2\mathbf{e}_2, \\ d\mathbf{e}_1 &= \qquad\quad \omega_{12}\mathbf{e}_2+\omega_{13}\mathbf{e}_3, \\ d\mathbf{e}_2 &= -\omega_{12}\mathbf{e}_1 \qquad +\omega_{23}\mathbf{e}_3, \\ d\mathbf{e}_3 &= -\omega_{13}\mathbf{e}_1-\omega_{23}\mathbf{e}_2. \end{aligned}\right\} \tag{3·23}$$

在 ω_i, ω_{ik} 之間成立了的結构方程 (2·25), (2·26), 即使 a_{ik}, a_i 受到象(3·21)一类的限制也仍成立. 現在,取其中一个

$$\omega_i' = [\omega_k\omega_{ki}] \tag{3·24}$$

来討論. 从 $\omega_3=0$ 看出,这些方程变为

$$\begin{aligned} \omega_1' &= [\omega_2\omega_{21}], \\ \omega_2' &= [\omega_1\omega_{12}], \\ 0 &= [\omega_1\omega_{13}]+[\omega_2\omega_{23}]. \end{aligned}$$

应用 Cartan 引理到这里的第三式,便得到下列关系:

$$\left.\begin{aligned} \omega_{13} &= a\omega_1+b\omega_2, \\ \omega_{23} &= b\omega_1+c\omega_2. \end{aligned}\right\} \tag{3·25}$$

同曲綫論的 Frenet 标形一样,在曲面上的各点应該唯一地确定同曲面最密切关联着的标形; 在这之前暫用上述的三参数的标形来叙述几件可以簡单討論的事項.

設 $\mathbf{X}$ 是在点 $\mathbf{x}$ 的切平面上的点; 因为 $\mathbf{X}-\mathbf{x}$ 必垂直于 $\mathbf{e}_3$ 而且反过来也成立,所以这切平面决定于方程

$$\mathbf{e}_3(\mathbf{X}-\mathbf{x})=0. \tag{3·26}$$

此式的左边一般地表示从空間的点 $\mathbf{X}$ 向着在 $\mathbf{x}(u, v)$ 的切平面所引的垂綫段的长.

設曲綫

$$u=u(t), \quad v=v(t), \quad a\leqslant t\leqslant b \tag{3·27}$$

通过点 $\mathbf{x}(u, v)$;方便上,把这点的对应参数 t 的值仍旧用 t 来記,

那末

$$\mathbf{x}(u(t+\Delta t),\ v(t+\Delta t))=\mathbf{x}(u(t),\ v(t))+\dot{\mathbf{x}}\Delta t+\frac{\ddot{\mathbf{x}}}{2}\Delta t^2+\cdots,$$

从而由这点向着切平面(3·26)所引垂綫段的长决定于

$$\mathbf{e}_3\left(\dot{\mathbf{x}}\Delta t+\ddot{\mathbf{x}}\frac{\Delta t^2}{2}+\cdots\right).$$

可是

$$\dot{\mathbf{x}}=\frac{\omega_1}{dt}\mathbf{e}_1+\frac{\omega_2}{dt}\mathbf{e}_2,$$

所以

$$\mathbf{e}_3\dot{\mathbf{x}}=0.$$

在这里 $\frac{\omega_1}{dt}$, $\frac{\omega_2}{dt}$ 表示把(3·27)和任意的 $\theta(t)$ 代到 Pfaff 形式 ω_1, ω_2 中去的式子. 又当計算 $\mathbf{e}_3\ddot{\mathbf{x}}$ 时, $\ddot{\mathbf{x}}$ 中的 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$ 两項与 $\mathbf{e}_3$ 的数量积各等于0, 如果用[*]表示这項,便有

$$\ddot{\mathbf{x}}=\frac{\omega_1}{dt}\frac{d\mathbf{e}_1}{dt}+\frac{\omega_2}{dt}\frac{d\mathbf{e}_2}{dt}+[*]$$

$$=\left(\frac{\omega_1}{dt}\frac{\omega_{13}}{dt}+\frac{\omega_2}{dt}\frac{\omega_{23}}{dt}\right)\mathbf{e}_3+[*].$$

因此,从(3·25)得到

$$\mathbf{e}_3\left(\dot{\mathbf{x}}\Delta t+\ddot{\mathbf{x}}\frac{\Delta t^2}{2}+\cdots\right)$$

$$=\frac{a\omega_1^2+2b\omega_1\omega_2+c\omega_2^2}{dt^2}\frac{\Delta t^2}{2}+\text{高次項}. \qquad (3\cdot 28)$$

設 Δt 是充分小量, 置 $\Delta t=dt$, 那末从点 $\mathbf{x}(u+du,\ v+dv)$ 向着在点 $\mathbf{x}(u,\ v)$ 的切平面所引的垂綫段的长的二倍, 把高次的項略去不計,恰恰是

$$a\omega_1^2+2b\omega_1\omega_2+c\omega_2^2. \qquad (3\cdot 29)$$

我們称此式为曲面的**第二基本微分形式**. 也可改写为

$$\mathbf{e}_3d^2\mathbf{x}\equiv-d\mathbf{x}\cdot d\mathbf{e}_3\equiv\omega_{13}\omega_1+\omega_{23}\omega_2. \qquad (3\cdot 30)$$

这个二次形式在曲面論里也是很重要的.

第二基本形式不一定是正定值. 甚至所有系数都是0的情况也会发生. 方便上，分别地用 I, II 来表达第一、第二基本微分形式.

在曲面的一点的切平面上，关于一次标形的方程

$$ax_1^2+2bx_1x_2+cx_2^2=\varepsilon \tag{3·31}$$

(ε 是正或負的适当的实数)表示了在这点的所謂 **Dupin 标形**. 我們引这点的切平面的平行平面，使两平面非常靠近，从而所引平面和曲面具有截口曲綫. 把这曲綫相似地放大; 当截口的平面无限趋近于切平面时，这放大曲綫的极限就是 Dupin 标形. 当 Dupin 标形是椭圓时，称所論曲面在这点是**椭圓地彎曲的**，或者称这点是曲面上的**椭圓点**. 这时候对于充分小的 Δt, (3·28)式的右边是定值. 曲面在这点的邻域全部在这点的切平面的一边. 当 Dupin 标形是双曲綫时，称所論曲面在这点是**双曲地彎曲的**，或者称这点是曲面上的**双曲点**. 这时候对于充分小的 Δt, (3·28)式的右边有时取正值，有时取負值，所以曲面在所論点的邻域跨在这点的切平面的两边. 用切平面的上下側的平行平面分别地作出各平面与曲面的截口曲綫，而且把它正射影到切平面上去，这两曲綫大致近似于两条以二直綫 $ax_1^2+2bx_1x_2+cx_2^2=0$ 为漸近綫的共軛双曲綫.

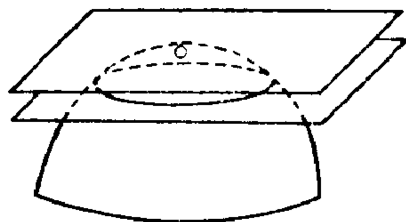


图 3·6

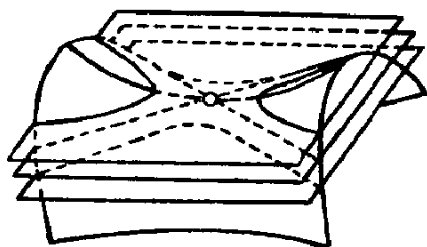


图 3·7

双曲点的邻域具备馬鞍形，所以有鞍点的称呼. 也可以看作象岭背的点.

为了 Dupin 标形变为椭圆或双曲綫的条件，明显地分别是

$$ac-b^2>0, \quad <0. \tag{3·32}$$

另外，当 Dupin 标形不是椭圆，又不是双曲綫时，称曲面在所論点是**抛物地弯曲的**，或者称所論点是**抛物点**．这时候，

$$ac-b^2=0.$$

因此，如果 $ax_1^2+2bx_1x_2+cx_2^2$ 的系数中有不等于 0 的，此式变为一次式的平方．从而，Dupin 标形是两条平行直綫，而且曲面在这点的邻域也全在切平面的一边．

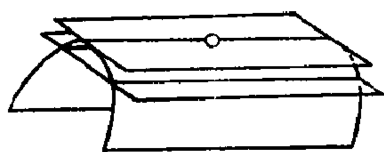


图 3·8

但是，系数 a，b，c 可能全等于 0 的．这时候，从曲面上的所論点 $\mathbf{x}$ 的邻域的一点向点 $\mathbf{x}$ 的切平面所引垂綫段的长是 ω_1, ω_2 的三次式，或者当它的系数也全是 0 时，是四次式，等等．所以按照这里的首項的次数和其标准型曲面在点 $\mathbf{x}$ 的邻近可以有种种的形状．

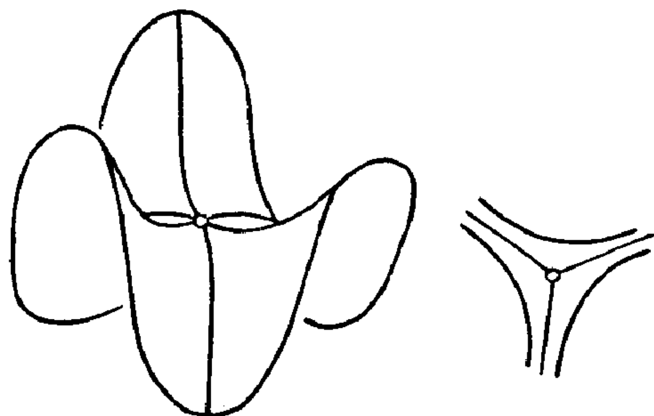


图 3·9

图 3·9 是 Dupin 标形变为三次曲綫的一例．这就是三条路会合于岭背的一点的情况．

球面、椭球面和椭圆的抛物面仅由椭圆点組成，单叶双曲面、双曲的抛物面仅由双曲点組成，圓柱面、圓錐面則仅由抛物点組成．

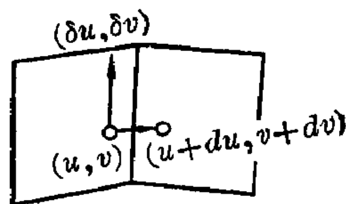


图 3·10

在曲面的一点 $\mathbf{x}(u, v)$ 的切平面上对应于 $(\delta u, \delta v)$ 的方向要和在 $\mathbf{x}(u+du, v+dv)$ 的切平面平行，条件是：方向

$$\delta\mathbf{x}-\mathbf{x}_u\delta u+\mathbf{x}_v\delta v \tag{3·33}$$

要満足

$$(\mathbf{e}_3+d\mathbf{e}_3)\delta\mathbf{x}=0.$$

这式可改写为

$$d\mathbf{e}_3\cdot\delta\mathbf{x}=0, \tag{3·34}$$

所以从(3·23)代入的結果,

$$(-\omega_{13}(d)\mathbf{e}_1-\omega_{23}(d)\mathbf{e}_2)(\omega_1(\delta)\mathbf{e}_1+\omega_2(\delta)\mathbf{e}_2)=0,$$

即

$$\omega_{13}(d)\omega_1(\delta)+\omega_{23}(d)\omega_2(\delta)=0.$$

从(3·25)代入此式,便得到

$$a\omega_1(d)\omega_1(\delta)+b\{\omega_1(d)\omega_2(\delta)+\omega_1(\delta)\omega_2(d)\}$$
$$+c\omega_2(d)\omega_2(\delta)=0. \tag{3·35}$$

这个条件关于 d, δ 是对称的. 所以在点 $\mathbf{x}(u, v)$ 的切平面上对应于 (du, dv) 的方向和在 $\mathbf{x}(u+\delta u, v+\delta v)$ 的切平面也是平行的. 称这样在曲面的点 $\mathbf{x}(u, v)$ 具有这种关系的两个方向 (du, dv), $(\delta u, \delta v)$ 为**共軛方向**.

容易看出, 所謂共軛方向是在普通平面解析几何的意义下关于 Dupin 标形的互相共軛的方向.

在曲面上取曲綫,它是由

$$u=u(t),\quad v=v(t),\quad a\leqslant t\leqslant b \tag{3·36}$$

表达的. 我們考察 u, v 都是 t 的可微分的一种曲綫.

現在假定在曲綫 C 上的每一点的密切平面和曲面的切平面重合一致. 为求出这时所要的条件,設 C 的方程是(3·36),从(3·30)看出在 C 的每一点密切平面要恒重合于曲面的切平面的条件是,沿这条曲綫恒成立

$$\omega_1\omega_{13}+\omega_2\omega_{23}=0,$$

即

$$a\omega_1^2+2b\omega_1\omega_2+c\omega_2^2=0. \tag{3·37}$$

凡在 C 的每一点的密切平面和曲面的切平面重合的曲綫, 称为**主切曲綫**或**漸近曲綫**.

上式的左边关于 ω_1, ω_2 是二次形式. 从初等代数的二次方程有关的知識容易了解,如果

$$b^2-ac<0, \tag{3·38}$$

那末滿足上式的实数 $\omega_1:\omega_2$ 就不存在;相反,如果在曲面上的某部分成立了关系式

$$b^2-ac\geqslant 0, \tag{3·39}$$

那末仅在这部分即仅在双曲点和拋物点所組成的部分存在主切曲綫. 并且使 (3·37) 成立的 $\omega_1:\omega_2$ 給出了作为 Dupin 标形的双曲綫的漸近綫的方向,甚至两条平行直綫的方向.

現在,从 (3·23) 容易看出 ω_1, ω_2 仅仅是 du, dv 的綫性組合. 它的系数是 u, v, θ 的函数,但如果采用前述的标形 $\mathbf{x}\eta_1\eta_2\mathbf{e}_3$,便成为仅仅 u, v 的函数. 这样一来,(3·37) 式变为

$$L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2=0 \tag{3·40}$$

的形狀(L, M, N 单是 u, v 的函数). 当 $b^2-ac\geqslant 0$ 时,从几何方面明显地了解 $M^2-LN\geqslant 0$,从而二次式可分解为 du, dv 的实系数的两个一次式. 現在設其中一个是

$$A(u,\ v)du+B(u,\ v)dv=0.$$

如果 $B\neq 0$,便可改写它为

$$\frac{dv}{du}=-\frac{A(u,\ v)}{B(u,\ v)},$$

所以(3·40)表示两組一阶常微分方程. 在微分方程論里成立下列定理:

定理 設(A) $f(x,y)$ 在領域 D: $0\leqslant x-x_0<a$, $|y-y_0|<b$ 是单值連續函数,而且 $|f(x,\ y)|\leqslant M$;

(B) 关于 D 的 $(x,\ y)$, $(x,\ z)$ 成立 Lipschitz 条件:

$$|f(x,\ y)-f(x,\ z)|\leqslant k|y-z|$$

(k 是和 x, y, z 无关的常数). 那末,

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y)$$

的解 $y=\phi(x)$ 在

$$0\leqslant x-x_0<a_0=\min\left(a, \frac{b}{M}\right)$$

唯一地存在，并且在这区間里是連續的。

应用上述定理，便得到：在曲面上 $b^2-ac\geqslant 0$ 的部分作为微分方程(3·40)的解的曲綫 $v=v(u)$ 一定存在。

对于此曲綫(3·37)恒成立，所以它是主切曲綫。

【习題】

1. 单叶双曲面、双曲的拋物面等一类的曲面上，都有直綫存在着；証明这些直綫是主切曲綫。

2. 把一个圓繞其一切綫的周圍旋轉，試求所生成的环面的主切曲綫。

3·3　法曲率. Frenet 标形的决定

考察一条通过曲面 S 的一点 $\mathbf{x}(u,v)$ 的曲綫 C，設它的 Frenet 标形是 $\mathbf{x}\xi_1\xi_2\xi_3$. 在 $\mathbf{x}(u, v)$ 的切平面上設 η 是垂直于 ξ_1 的单位向量，并且 ξ_1, η, $\mathbf{e}_3$ 要构成一个右手制. 在平面 $(\eta, \mathbf{e}_3)$ 上从 $\mathbf{e}_3$ 向 η 回轉的方向取作为正向，而設 ϕ 是对 $\angle(\mathbf{e}_3\xi_2)$ 加上正負符号的角度. 这样一来，就成立

$$\xi_2=\cos\phi\cdot\mathbf{e}_3+\cos\left(\phi-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\eta$$

$$=\cos\phi\cdot\mathbf{e}_3+\sin\phi\cdot\eta. \tag{3·41}$$

現在考察 C 的曲率向量 $\mathbf{x}''$，它是

$$\mathbf{x}''=k(s)\xi_2.$$

从而

$$\mathbf{x}''=k_g\cdot\eta+k_n\mathbf{e}_3,$$

式中

$$\left.\begin{aligned} k_g &= k(s)\sin\phi, \\ k_n &= k(s)\cos\phi. \end{aligned}\right\} \tag{3·42}$$

k_g 是 $\mathbf{x}''$ 在切平面上的正射影，称它为 C 的**測地曲率**．k_n 是 $\mathbf{x}''$ 在曲面的法綫上的正射影，称它为所論曲綫的**相对曲率**．

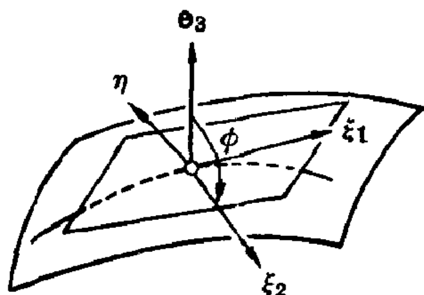


图 3·11

关于測地曲率将在后文叙述，在这里要討論相对曲率．因为 $k\cos\phi=\mathbf{e}_3\mathbf{x}''$，从(3·30)得到

$$k(s)\cos\phi=\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}. \tag{3·43}$$

由此可見，$\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}$ 是和一阶标形的选择无关的．还可看出 $k(s)\cos\phi$ 的值仅仅和在点 $\mathbf{x}(u, v)$ 的曲綫方向有关系，就是說：它对于具有同一切綫方向的所有曲綫都取同一值．

可是，我們已經假定了 $k(s)\geqslant 0$，所以上式右边的正負决定于角 ϕ 的銳鈍．現在，用曲面法綫和 C 的切綫所成的平面来截割曲面，对其截口曲綫 C^* 的曲率半徑按照上式右边的正負而添加正号或負号，也就是：如果 C^* 是向 $\mathbf{e}_3$ 的方向凹进，定为正号；而相反，如果凸出，就定为負号．設这样添加了符号的曲率半徑是 R，那末成立关系式

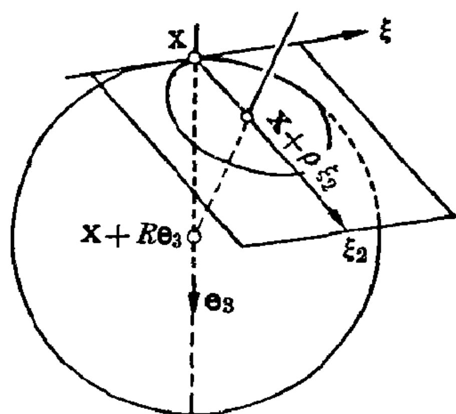


图 3·12

$$k(s)\cos\phi=\frac{1}{R}. \tag{3·44}$$

称 $\frac{1}{R}$ 为对于曲面上的所論方向的**法曲率**．

曲綫 C^* 的曲率中心是 $\mathbf{x}+R\mathbf{e}_3$，它在曲綫 C 的密切平面上的射影是

$$R(\mathbf{e}_3\xi_2)=R\cos\phi=\rho,$$

所以这就是 C 的曲率中心 $\mathbf{x}+\rho\xi_2$. 因此,得到

定理(Meusnier)　設在曲面 S 上的点 $\mathbf{x}(u, v)$ 通过曲面法綫的平面和 S 的截口曲綫是 C^*, 并且在 $\mathbf{x}(u, v)$ 和 C^* 相切的 S 上的曲綫是 C, 那末以 C^* 的曲率中心 $\mathbf{x}+R\mathbf{e}_3$ 为中心, 以 $|R|$ 为半徑的球面与 C 在 $\mathbf{x}(u, v)$ 的密切平面相交于 C 的密切圓.

在曲面上的一点 $\mathbf{x}$ 对应于方向 $\omega_1:\omega_2$ 的法曲率決定于

$$\frac{1}{R}=\frac{a\omega_1^2+2b\omega_1\omega_2+c\omega_2^2}{\omega_1^2+\omega_2^2}. \tag{3·45}$$

当 $\omega_1:\omega_2$ 即在点 $\mathbf{x}$ 所引曲面的切綫方向变动时,一般地 $\frac{1}{R}$ 的值要改变.

現在将求出使这值变为极大极小的切綫方向和它的极大极小值. 为此, 对于每一切綫方向置 $\frac{\omega_2}{\omega_1}=h$, 上式变成

$$\frac{1}{R}(1+h^2)=a+2bh+ch^2. \tag{3·46}$$

关于 h 导微两边; 因为 $\frac{1}{R}$ 是 h 的函数,它取极值的条件是

$$\frac{h}{R}=b+ch. \tag{3·47}$$

两边乘 h, 再从(3·46)边边相減,便得到

$$\frac{1}{R}=a+bh. \tag{3·48}$$

从最后两式消去 $\frac{1}{R}$,我們获得对于給出极值的方向的条件

$$(a+bh)h=b+ch,$$

即

$$b+(c-a)h-bh^2=0. \tag{3·49}$$

这是关于 h 的二次方程,所以只有两根. $\frac{1}{R}$ 应当有最大值和最小

值，而且以这些值为法曲率的切綫方向应当存在，从而(3·49)应当有实根．实际上，从它的判别式是 $(c-a)^2+4b^2\geqslant 0$ 这一事实也可明了．

在点 $\mathbf{x}$，(3·49) 式的解 h_1，h_2 所表的方向，称为在点 $\mathbf{x}$ 的**曲率方向**．当在曲面的曲綫上它的切綫方向恒成为这切点的曲率方向时，称这种曲綫为**曲率綫**．它是以微分方程

$$b\omega_1^2+(c-a)\omega_1\omega_2-b\omega_2^2=0 \tag{3·50}$$

为其特征的．

如果从 (3·47)，(3·48) 消去 h，便可求出在点 $\mathbf{x}$ 的法曲率的极值，所以它决定于

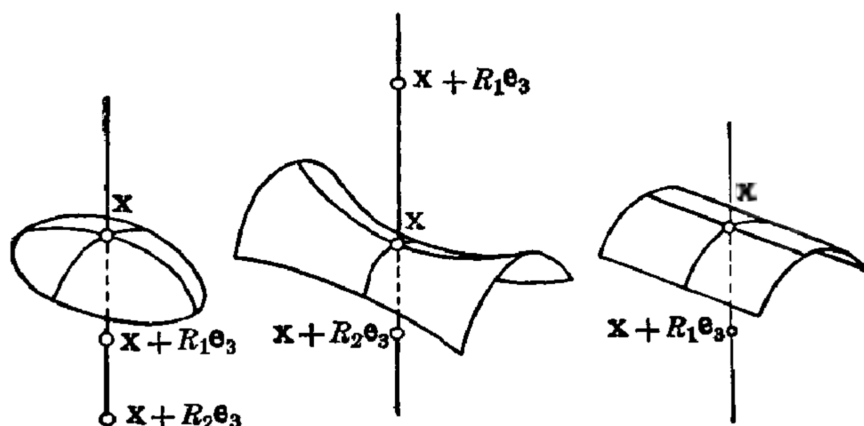


图 3·13

$$\begin{vmatrix} a-\dfrac{1}{R} & b \\ b & c-\dfrac{1}{R} \end{vmatrix}=0,$$

即

$$\frac{1}{R^2}-\frac{a+c}{R}+ac-b^2=0$$

的根．設这二次方程的两根是 $\dfrac{1}{R_1}$，$\dfrac{1}{R_2}$，从根与系数的关系看出

$$\left.\begin{aligned} 2H &\equiv \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=a+c, \\ K &\equiv \frac{1}{R_1 R_2}=ac-b^2. \end{aligned}\right\} \tag{3·51}$$

K, H 分别地称为曲面的 **Gauss 曲率**和**中曲率**，它們都是很重要的量. 称 R_1, R_2 为**主曲率半徑**.

在曲面上的每一点一阶标形容有繞法綫向量 $\mathbf{e}_3$ 的旋轉，所以有无穷多一阶标形. 如果能够从其中抽出和曲面在几何学上特别有密切关联的唯一的一阶标形的話，那末在各点选取这种标形，就可能使这些标形的相对支量成为表达曲面的几何性质的量了.

从上面的考察我們看到了在曲面上的每一点使包含法綫在内的平面和曲面的截口曲綫的曲率 $\frac{1}{R}$ 变成极大和极小的方向，一般地各有一个，并且这两方向互相垂直. 所以把 $\mathbf{e}_1$ 取在极小方向，$\mathbf{e}_2$ 取在极大方向，把法綫单位向量 $\mathbf{e}_3$ 这样选定，使这些向量組成右手制；这个标形 $\mathbf{x}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ 在点 $\mathbf{x}(u, v)$ 应当成为和曲面最有密切的几何关联的标形. 我們也不妨取 $\mathbf{e}_1$ 于极大方向，取 $\mathbf{e}_2$ 于极小方向. 我們不必去細分这个差别，只使 $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ 分别指向法曲率的极值的方向，$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ 形成右手制就够了. 称标形 $\mathbf{x}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ 为**曲面的 Frenet 标形**. 这样一来，如果 $\mathbf{x}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ 是 Frenet 标形，那末 $\mathbf{x}(-\mathbf{e}_1)(-\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_3$, $\mathbf{x}\mathbf{e}_2(-\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_3$, $\mathbf{x}(-\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3$ 也都是 Frenet 标形. 但是，在曲面上的一点选定这些标形中的随便哪一个，而在其他的点只須做出同它成为連續集的保証，那末在这样的四个标形中应该采用哪一个，在每一点就会唯一地确定下来.

以下，这样构成連續集的 Frenet 标形族，簡称为 Frenet 标形族.

上面所述只不过是关于一般点的情况，也是有例外的. 这个例外在无論通过法綫的截口的平面怎样选擇而 $\frac{1}{R}$ 总是一定的情况

下，即在

$$a=c, \quad b=0 \tag{3·52}$$

的点发生. 称这样的点为**臍点**. 容易看到，所謂臍点是在这里 Dupin 标形变成圓或高次曲綫的一类点. 在这种点任何一阶标形都可以看成 Frenet 标形.

在 Frenet 标形下采用法曲率的极小和极大方向为 $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$. 可是 $\mathbf{e}_1$ 方向决定于 $\omega_2=0$, 而 $\mathbf{e}_2$ 方向决定于 $\omega_1=0$. 所以在使用 Frenet 标形的情况下，曲率綫的微分方程(3·50)必須和

$$\omega_1\omega_2=0$$

是等价的，从而在使用 Frenet 标形的情况下，成立

$$b=0.$$

很明显，反过来也成立. 因此，Frenet 标形就是使 Dupin 标形的方程化为标准型

$$a\omega_1^2+c\omega_2^2=\varepsilon$$

的标形，也可以說成 $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ 向着它的主軸方向的标形.

我們对曲面上的每一点唯一地选定了标形使和它对应. 这样一来，同曲綫論的时候一样，在其相对支量里自然地出現了表达曲面特征的不变式. 这件事实成为活动标形理論的有效的依据之一. 此外，这个方法不仅在欧几里得微分几何而且在黎曼几何和其他許多几何里也是同样有效的.

【习題】

1. 設在曲面上的椭圓点和双曲点，主曲率半徑是 R_1, R_2, 对应于任意方向的法曲率的倒数是 R, 而且这方向和对应于 R_1 的曲率方向所成的角是 θ, 証明下列公式成立：

$$\frac{1}{R}=\frac{\cos^2\theta}{R_1}+\frac{\sin^2\theta}{R_2}$$

(Euler 定理).

2. 把平面曲綫圍繞同一平面內的一直綫旋轉而生成的曲面，称为**回轉面**. 称原来的平面曲綫和对应于各回轉角 θ 的象曲綫为**子午綫**，称原来的平面曲綫上的点給回轉后生成的圓为**平行圓**. 証明回轉面的曲率綫是子午綫和平行圓.

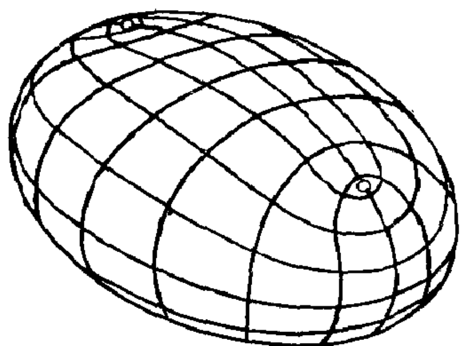


图　3·14

3. 在有心二次曲面的参数表示

$$x_i = \pm\sqrt{\frac{a_i(a_i-u)(a_i-v)}{(a_i-a_j)(a_i-a_k)}},\quad i\neq j\neq k$$

(其中 a_1, a_2, a_3 常数)，証明参数曲綫是曲率綫. 图3.14表示橢球面上的曲率綫.

3·4　直紋面

我們到現在叙述了一般的曲面，但是作为曲面的例子或者为开展曲面的一般理論提供的手段，直紋面特別是撓面是很重要的，叙述于次.

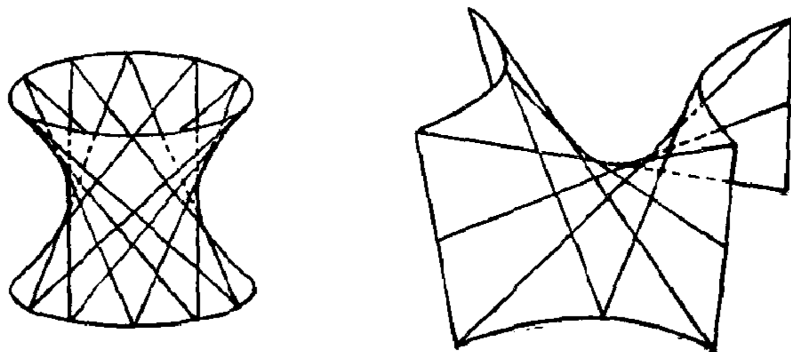


图　3·15

直綫随时間 $t(a\leqslant t\leqslant b)$ 运动而画成的曲面，称为**直紋面**，而动直綫称为**母綫**. 例如，在立体解析几何中学过的单叶双曲面、双曲的拋物面、圓柱面、圓錐面等都是直紋面. 特別是，单叶双曲面和双曲的拋物面都是有两套母綫的直紋面.

在直紋面上也应当可以同前节一样地采用 Frenet 标形来开

展它的理論. 但是在这样的特殊曲面的情况下，因为它的特殊性或許有更方便的标形. 实际上,直紋面的母綫受到单参数的运动,所以分别地对各母綫或許可以找出同曲面在几何上最有密切关联的标形. 假如是这样的話，那末这些标形的原点所画的曲綫和相对支量应当成为直截了当地表达直紋面的几何性质.

在这里为了决定这样的标形，同决定曲綫和一般的曲面的 Frenet 标形时一样，我們可用几何的考察作为基础. 但是，为要以别的方式显示活动标形理論的威力，在这里有意識地避免运用几何方法而解析地进行討論，来闡明怎样很自然地达到几何的对象的經过. 活动标形理論就是在这样想法一般化的基础上，还可适用于种种的几何图形.

我們說过对各母綫要找出同給定的直紋面最有几何的密切关联的标形；而当这种标形的原点 $\mathbf{x}$ 在母綫 l 上时，把其一向量(例如 $\mathbf{e}_1$)选在通过 $\mathbf{x}$ 的母綫上，这是当然的.

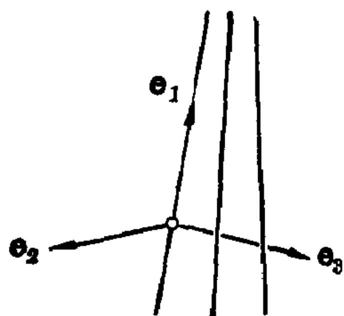


图 3·16

現在,設对动母綫都已标好方向,标形 $\mathbf{x}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ 的原点 $\mathbf{x}$ 在母綫 l 上，$\mathbf{e}_1$ 在 l 上并且它的方向也和 l 一致. 在这种标形中单是原点要在 l 上的,和两个参数有关,所以总数和三个参数有关,并且成立下列关系:

$$\left.\begin{aligned} d\mathbf{x}&=\omega_1\mathbf{e}_1+\omega_2\mathbf{e}_2+\omega_3\mathbf{e}_3,\\ d\mathbf{e}_i&=\omega_{ij}\mathbf{e}_j,\ \omega_{ij}+\omega_{ji}=0. \end{aligned}\right\} \tag{3·53}$$

为了从这样的标形中挑出同所論的直紋面特别有几何关系的标形，只要对决定标形的无穷小平行移动和无穷小旋轉的支量 ω_i, ω_{ij} 給与某些条件,借以适当地限制标形.

如果考察同 $\mathbf{x}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ 在同一母綫 l 上具有原点的其他标形 $\bar{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{e}}_1\bar{\mathbf{e}}_2\bar{\mathbf{e}}_3$，那末

$$\left.\begin{aligned}&\bar{\mathbf{x}}=\mathbf{x}+v\mathbf{e}_1,\\&\bar{\mathbf{e}}_1=\mathbf{e}_1,\\&\bar{\mathbf{e}}_2=\mathbf{e}_2\cos\theta-\mathbf{e}_3\sin\theta,\\&\bar{\mathbf{e}}_3=\mathbf{e}_2\sin\theta+\mathbf{e}_3\cos\theta.\end{aligned}\right\}\qquad(3\cdot54)$$

在(3·53)中的 ω_i, ω_{ij} 一般地是三个变数的一次微分形式，但是其中也有仅包含 dt 在內的．那就是当 t 固定时变成0的一类 ω，而且从标形的自由度具有 (3·54) 的形式这个事实容易看出，它們是 ω_2, ω_3, ω_{12}, ω_{13}．我們現在来检查这四个对于变换(3·54)要起怎样的变化．首先得到

$$d\bar{\mathbf{x}}=d\mathbf{x}+dv\mathbf{e}_1+v\,d\mathbf{e}_1.$$

如果注意到关于$(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{e}}_i)$也成立(3·53)的同样方程，而且把其中的 Pfaff 形式記作 $\bar{\omega}_i$, $\bar{\omega}_{ij}$，从上式得出

$$\bar{\omega}_i\bar{\mathbf{e}}_i=\omega_i\mathbf{e}_i+dv\cdot\mathbf{e}_1+v(\omega_{12}\mathbf{e}_2+\omega_{13}\mathbf{e}_3).$$

左边可以写成

$$\bar{\omega}_1\mathbf{e}_1+\bar{\omega}_2(\mathbf{e}_2\cos\theta-\mathbf{e}_3\sin\theta)+\bar{\omega}_3(\mathbf{e}_2\sin\theta+\mathbf{e}_3\cos\theta).$$

因为两边的 $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ 的系数相等，

$$\bar{\omega}_2\cos\theta+\bar{\omega}_3\sin\theta=\omega_2+v\omega_{12},$$
$$-\bar{\omega}_2\sin\theta+\bar{\omega}_3\cos\theta=\omega_3+v\omega_{13}.$$

把这組看做以 $\bar{\omega}_2$, $\bar{\omega}_3$ 为未知函数的联立方程組而解它，便获得

$$\left.\begin{aligned}&\bar{\omega}_2=\omega_2\cos\theta-\omega_3\sin\theta+v(\omega_{12}\cos\theta-\omega_{13}\sin\theta),\\&\bar{\omega}_3=\omega_2\sin\theta+\omega_3\cos\theta+v(\omega_{12}\sin\theta+\omega_{13}\cos\theta).\end{aligned}\right\}\qquad(3\cdot55)$$

又　$$d\bar{\mathbf{e}}_1=\bar{\omega}_{12}\bar{\mathbf{e}}_2+\bar{\omega}_{13}\bar{\mathbf{e}}_3$$
$$=\bar{\omega}_{12}(\mathbf{e}_2\cos\theta-\mathbf{e}_3\sin\theta)+\bar{\omega}_{13}(\mathbf{e}_2\sin\theta+\mathbf{e}_3\cos\theta).$$

可是 $\bar{\mathbf{e}}_1=\mathbf{e}_1$，此式等于

$$d\mathbf{e}_1=\omega_{12}\mathbf{e}_2+\omega_{13}\mathbf{e}_3,$$

所以比較 $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ 的系数，便得到

$$\bar{\omega}_{12}\cos\theta+\bar{\omega}_{13}\sin\theta=\omega_{12},$$

$$-\bar{\omega}_{12}\sin\theta+\bar{\omega}_{13}\cos\theta=\omega_{13},$$

从而导出

$$\left.\begin{aligned}\bar{\omega}_{12}&=\omega_{12}\cos\theta-\omega_{13}\sin\theta,\\ \bar{\omega}_{13}&=\omega_{12}\sin\theta+\omega_{13}\cos\theta.\end{aligned}\right\}\tag{3·56}$$

現在从上面所述的依賴三个参数的标形族任意取定和 t 一齐連續地移动的一个参数的标形族，記它为 $\mathbf{x}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$。这样一来，

$$\omega_i=p_i(t)\,dt,\quad \omega_{ij}=p_{ij}(t)\,dt.$$

在这里决定这样的 $\theta(t)$ ($\theta(t)+\pi$ 也可以)，使

$$p_{12}(t)\sin\theta+p_{13}(t)\cos\theta=0$$

成立；又决定 $v(t)$，使

$$\begin{aligned}&p_2(t)\cos\theta(t)-p_3(t)\sin\theta(t)\\ &\quad+v\{p_{12}(t)\cos\theta(t)-p_{13}(t)\sin\theta(t)\}=0\end{aligned}$$

成立。在(3·54) 里用这样的 $v(t)$，$\theta(t)$ 来确定标形 $\bar{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{e}}_1\bar{\mathbf{e}}_2\bar{\mathbf{e}}_3$，从 $(3·56)_2$，$(3·55)_1$ 看出，对于这种标形成立

$$\bar{\omega}_{13}=0,\quad \bar{\omega}_2=0.$$

满足这样的条件的标形，称为**直紋面的 Frenet 标形**。

重新把 Frenet 标形写做 $\mathbf{y}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$，那末

$$\omega_2=0,\quad \omega_{13}=0,\tag{3·57}$$

容易看出，除此而外变成 Frenet 标形的只有 $\mathbf{y}\mathbf{e}_1(-\mathbf{e}_2)(-\mathbf{e}_3)$。这些标形全体又构成連續的标形族。

Frenet 标形 $\mathbf{y}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ 的每一个对应于各母綫，所以 $\mathbf{y}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ 单是 t 的函数，从而

$$\omega_1=p_1(t)\,dt,\quad \omega_3=p_3(t)\,dt,$$
$$\omega_{12}=p_{12}(t)\,dt,\quad \omega_{23}=p_{23}(t)\,dt.$$

假定 $\omega_{12}\neq 0$，而且置

$$du\equiv\omega_{12}=p_{12}(t)\,dt.\tag{3·58}$$

这样一来，

$$u=\int_a^t p_{12}(t)\,dt. \tag{3·59}$$

因为在 $a\leqslant t\leqslant b$ 里 $p_{12}(t)\neq 0$, u 是狹义的单調函数，所以反过来可以解出(3·59)．因此，可以把 t 看作为 u 的函数．这样，不妨写出

$$\omega_3\equiv p_3(t)\,dt=\gamma(u)\,du. \tag{3·60}$$

同样，得到

$$\omega_1=\alpha(u)\,du,\quad \omega_{23}=\beta(u)\,du. \tag{3.61}$$

从这些关系导出

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\mathbf{y}}{du}&=\alpha\mathbf{e}_1+\gamma\mathbf{e}_3,\quad \frac{d\mathbf{e}_1}{du}=\mathbf{e}_2,\\ \frac{d\mathbf{e}_2}{du}&=-\mathbf{e}_1+\beta\mathbf{e}_3,\frac{d\mathbf{e}_3}{du}=-\beta\mathbf{e}_2.\end{aligned}\right\} \tag{3·62}$$

这是对于直紋面来說，相当于 Frenet 公式的式子．

我們已經作了 $\omega_{12}\neq 0$ 的假定，但如果 $\omega_{12}=0$，那末 $d\mathbf{e}_1=0$，就是母綫 l 在瞬間 t 的方向是稳定的．假如不管 t 的值怎样 $\omega_{12}\equiv 0$ 的話，所論的直紋面是柱面．

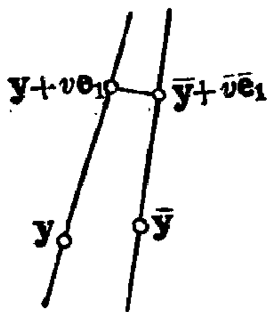


图 3·17

現在，要討論对于直紋面的 Frenet 标形的几何意义．首先假定两母綫 u 和 $\bar{u}$ 的公共垂綫是連結它們上面的点 $\mathbf{y}(u)+v\mathbf{e}_1(u)$, $\mathbf{y}(\bar{u})+\bar{v}\mathbf{e}_1(\bar{u})$ 来决定的．方便上置 $\mathbf{y}(\bar{u})\equiv\bar{\mathbf{y}}$, $\mathbf{e}_1(\bar{u})\equiv\bar{\mathbf{e}}_1$，要做公共垂綫的条件变成

$$(\bar{\mathbf{y}}+\bar{v}\bar{\mathbf{e}}_1-\mathbf{y}-v\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1=0,$$
$$(\bar{\mathbf{y}}+\bar{v}\bar{\mathbf{e}}_1-\mathbf{y}-v\mathbf{e}_1)\bar{\mathbf{e}}_1=0.$$

改写之，

$$(\bar{\mathbf{y}}-\mathbf{y})\mathbf{e}_1+\bar{v}(\mathbf{e}_1\bar{\mathbf{e}}_1)-v=0,$$
$$(\bar{\mathbf{y}}-\mathbf{y})\bar{\mathbf{e}}_1+\bar{v}-v(\mathbf{e}_1\bar{\mathbf{e}}_1)=0.$$

从最后作为关于 $v, \bar{v}$ 的联立方程解出 v，便获得

$$v=-\frac{(\bar{\mathbf{y}}-\mathbf{y})\left((\mathbf{e}_1\bar{\mathbf{e}}_1)\bar{\mathbf{e}}_1-\mathbf{e}_1\right)}{1-(\mathbf{e}_1\bar{\mathbf{e}}_1)^2}.$$

在这里置 $\bar{u}=u+\Delta u$，并求当 $\Delta u\to 0$ 时 v 的极限值。为此，考察

$$-\lim_{\Delta u\to 0}\frac{[(\alpha\mathbf{e}_1+\gamma\mathbf{e}_3)\Delta u+\cdots][\mathbf{e}_2\Delta u+\cdots]}{1-(1-\Delta u^2+\cdots)},$$

由于分子是 Δu 的三次无穷小量，分母是二次，所以极限等于 0。因而看出，在母綫 l 上的 Frenet 标形的原点 $\mathbf{y}$ 是給出 l 与其相邻母綫的公共垂綫（最短距离）的点。称这样的点为母綫 l 的**中心**，称中心的軌迹为**腰綫**。这是好象把一捆柴綁起来的绳子的曲綫。

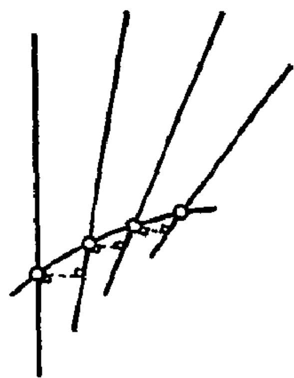


图 3·18

腰綫有时会縮成一点。这时所有母綫都通过一个定点，这就是錐面。

从 (3·62) 可以看出，在母綫 l 的中心 $\mathbf{y}$ 所引腰綫的切綫具有 $\alpha\mathbf{e}_1+\gamma\mathbf{e}_3$ 的方向。如果称这直紋面在中心 $\mathbf{y}$ 的切平面为**中央平面**，那末就可以說：$\mathbf{e}_2$ 是在中心 $\mathbf{y}$ 的中央平面法綫单位向量，而 $\mathbf{e}_3$ 是在中央平面上并且和母綫 l 垂直的向量。

其次，将叙述在直紋面的 Frenet 公式里出現的一些量 u, α, β, γ 的几何意义。

决定母綫方向的向量 $\mathbf{e}_1(u)$，在单位球面上画出曲綫 C^*，这是給定的直紋面的球面表示。因为

$$\frac{d\mathbf{e}_1}{du}=\mathbf{e}_2,$$

很明显，u 是 C^* 的弧长。

設两母綫 $l(u)$，$l(\bar{u})$ 間的最短距离是 Δd；因为通过 $l(u)$ 而且和 $l(\bar{u})$ 平行的平面决定于方程

$$|\mathbf{X}-\mathbf{y}(u)\ \ \mathbf{e}_1(u)\ \ \mathbf{e}_1(\bar{u})|=0, \tag{3·63}$$

从 $\mathbf{y}(\bar{u})$ 向这平面所引的垂綫的长等于 Δd,所以得到

$$\Delta d=\frac{|\mathbf{y}(\bar{u})-\mathbf{y}(u)\ \ \mathbf{e}_1(u)\ \ \mathbf{e}_1(\bar{u})|}{\sqrt{(\mathbf{e}_1(u)\times\mathbf{e}_1(\bar{u}))^2}}. \tag{3·64}$$

置 $\bar{u}=u+\Delta u$, 从 Frenet 公式(3·62)容易看出

$$\begin{aligned}
\text{分子}&=|(\alpha\mathbf{e}_1+\gamma\mathbf{e}_3)\Delta u+\cdots,\ \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2\Delta u+\cdots|\\
&=\gamma|\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3|\Delta u^2+\cdots=\gamma\Delta u^2+\cdots,\\
\text{分母}&=\sqrt{\{\mathbf{e}_1\times(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2\Delta u+\cdots)\}^2}\\
&=\sqrt{(\mathbf{e}_3\Delta u+\cdots)^2}=\Delta u+\cdots,
\end{aligned}$$

因此, $l(u)$, $l(u+\Delta u)$ 的公共垂綫的长 Δd 决定于

$$\Delta d=\gamma\Delta u+\cdots \tag{3·65}$$

可是如上所述 u 是給定的直紋面的球面表示的弧长, 如果 $l(u)$, $l(u+\Delta u)$ 所成的角是 $\Delta\theta$, 那末

$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta u}=1, \tag{3·66}$$

所以从(3·65)获得

$$\gamma(u)=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta d}{\Delta\theta}. \tag{3·67}$$

称 $\gamma(u)$ 为**配分参数**.

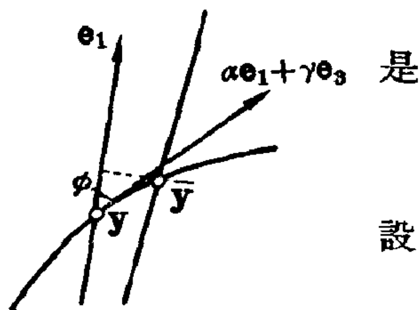


图 3·19

现在来求 α 的几何意义. 腰綫的切綫是

$$\frac{d\mathbf{y}}{du}=\alpha\mathbf{e}_1+\gamma\mathbf{e}_3.$$

設它与母綫 $\mathbf{e}_1$ 所成的角是 ϕ,很明显,

$$\alpha=\gamma\cot\phi. \tag{3·68}$$

最后,为了要导出 β 的几何意义,取直紋面的球面表示 C^*: $\mathbf{e}_1(u)$, u 是它的弧长, 而且成立

$$\frac{d^2\mathbf{e}_1}{du^2}=-\mathbf{e}_1+\beta\mathbf{e}_3.$$

所以在 C^* 的点 u 所引球面的切平面上作 $\frac{d^2\mathbf{e}_1}{du^2}$ 的正射影，因为 $\mathbf{e}_1$ 是球面的法綫，等于 β。从而，β 是作为球面曲綫的 C^* 的測地曲率。

直紋面上的一般点是由

$$\mathbf{x}(u, v)=\mathbf{y}(u)+v\mathbf{e}_1(u) \tag{3·69}$$

表达的，所以

$$\begin{aligned} d\mathbf{x}&=d\mathbf{y}+dv\mathbf{e}_1+vd\mathbf{e}_1\\ &=(\alpha\mathbf{e}_1+v\mathbf{e}_2+\gamma\mathbf{e}_3)du+\mathbf{e}_1dv. \end{aligned}$$

因此，在点 (u, v) 的切平面是由 $\mathbf{e}_1$ 与 $\alpha\mathbf{e}_1+v\mathbf{e}_2+\gamma\mathbf{e}_3$ 所撑成的。很明显，在切平面內垂直于 $\mathbf{e}_1$ 的单位向量是

$$\mathbf{e}_2^*=\frac{v\mathbf{e}_2+\gamma\mathbf{e}_3}{\sqrt{\gamma^2+v^2}}. \tag{3·70}$$

此外，法綫向量是

$$\mathbf{e}_3^*=\frac{-\gamma\mathbf{e}_2+v\mathbf{e}_3}{\sqrt{\gamma^2+v^2}}. \tag{3·71}$$

方便上，置

$$\mathbf{e}_1^*=\mathbf{e}_1. \tag{3·72}$$

这样一来，我們获得

$$d\mathbf{x}=\omega_1\mathbf{e}_1^*+\omega_2\mathbf{e}_2^*, \tag{3·73}$$

$$\omega_1=\alpha\,du+dv,\quad \omega_2=\sqrt{\gamma^2+v^2}\,du. \tag{3·74}$$

为了算出 $d\mathbf{e}_1^*$，从

$$d\mathbf{e}_1^*=d\mathbf{e}_1=\mathbf{e}_2du,$$

$$\mathbf{e}_2=\frac{v\mathbf{e}_2^*-\gamma\mathbf{e}_3^*}{\sqrt{\gamma^2+v^2}} \tag{3·75}$$

得到

$$d\mathbf{e}_1^*=\omega_{12}\mathbf{e}_2^*+\omega_{13}\mathbf{e}_3^*, \tag{3·76}$$

$$\omega_{12}=\frac{v\,du}{\sqrt{\gamma^2+v^2}},\quad \omega_{13}=\frac{-\gamma\,du}{\sqrt{\gamma^2+v^2}}. \tag{3·77}$$

关于

$$d\mathbf{e}_2^* = d\left(\frac{v\mathbf{e}_2 + \gamma\mathbf{e}_3}{\sqrt{\gamma^2+v^2}}\right)$$

的演算先用 (3·62) 化为 $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ 的綫性組合，再从 (3·70), (3·71), (3·72) 表达为 $\mathbf{e}_1^*$, $\mathbf{e}_2^*$, $\mathbf{e}_3^*$ 的綫性組合,

$$d\mathbf{e}_2^* = -\omega_{12}\mathbf{e}_1^* + \omega_{23}\mathbf{e}_3^*, \tag{3·78}$$

式中

$$\omega_{23} = \frac{\left\{\beta(\gamma^2+v^2) + v\dfrac{d\gamma}{du}\right\}du - \gamma\, dv}{\gamma^2+v^2}. \tag{3·79}$$

在这里置

$$\omega_{13} = a\omega_1 + b\omega_2,$$

$$\omega_{23} = b\omega_1 + c\omega_2,$$

从(3·74), (3·77), (3·79)立刻看出

$$a=0,\ b=\frac{-\gamma}{\gamma^2+v^2},\quad c=\frac{\beta(\gamma^2+v^2)+v\dfrac{d\gamma}{du}+\alpha\gamma}{(\gamma^2+v^2)^{3/2}}. \tag{3·80}$$

由此可見,直紋面的 Gauss 曲率是

$$K = ac - b^2 = \frac{-\gamma^2}{(\gamma^2+v^2)^2}. \tag{3·81}$$

因而,成立

定理　直紋面的 Gauss 曲率一般地是負值.(如在下节将予叙述的,仅限于可展面的时候,这才恒等于 0.)

我們看到,直紋面的第二基本形式是

$$\omega_1\omega_{13} + \omega_2\omega_{23} = \frac{\left\{\beta(\gamma^2+v^2) + v\dfrac{d\gamma}{du} - \alpha\gamma\right\}du^2 - 2\gamma\, du\, dv}{\sqrt{\gamma^2+v^2}}.$$

从这式得到主切曲綫的微分方程

$$du\left[\left\{\beta(\gamma^2+v^2) + v\frac{d\gamma}{du} - \alpha\gamma\right\}du - 2\gamma\, dv\right] = 0. \tag{3·82}$$

左边第一因子 $du=0$ 表示母綫本身是主切曲綫的事实。

当 $\gamma=0$ 时，两系主切曲綫重合为母綫。

当 $\gamma\neq 0$ 时，另一系主切曲綫决定于微分方程

$$2\gamma\frac{dv}{du}=\beta v^2+\frac{d\gamma}{du}v+\beta\gamma^2-\alpha\gamma \tag{3·83}$$

的积分曲綫 $v=v(u)$。上式是形如

$$\frac{dv}{du}=P(u)v^2+Q(u)v+R(u)$$

的所謂 Riccati 型微分方程。可是在初等微分方程論里成立

引理 設 Riccati 型微分方程的四个解是 $v_1(u)$，$v_2(u)$，$v_3(u)$，$v_4(u)$，那末交比

$$\frac{v_1-v_3}{v_2-v_3}:\frac{v_1-v_4}{v_2-v_4}$$

同 u 的值无关而是一定的。

要証明它，只須取上式的对数，加以导微而且利用关系式

$$\frac{v_1'-v_3'}{v_1-v_3}=P(v_1+v_3)+2Q$$

就够了。

应用这引理到(3·83)，便导出下列定理：

定理 設直紋面的 γ 不等于 0，那末它的母綫以外的任何四条主切曲綫和每一条母綫相交于有一定交比的四点。

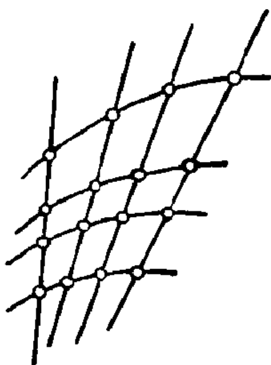


图 3·20

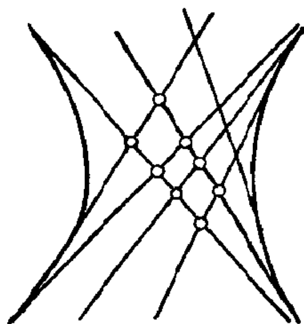


图 3·21

在单叶双曲面上一系的四条母綫和另一系的每一条母綫相交于有一定交比的四点．这性质在二次曲面論里是很重要的．象单叶双曲面、双曲抛物面一类的二次曲面有两系母綫，而在空間里不相交的两直綫 l, m 上为了要決定点列間的一对一的点对应 T，对于直綫 l 上的任意四点所作交比必須等于直綫 m 上的四个对应点的交比；如果考察对应点的連綫，这些直綫构成单叶双曲面或双曲抛物面的一系母綫．如果在对应 T 下 l 上的有限位置的一点对应于 m 上的无穷远点(这时候，m 上的有限位置的一点也对应于 l 上的无穷远点)，所論曲面是单叶双曲面．反之，如果 l 上的任何有限位置的点一定对应于 m 上的有限位置的点，那末这曲面是双曲抛物面．

如在程度稍高的解析几何里所述，在复数空間即以复数为坐标的空間里考察二次曲面的时候，上述的事实关于椭球面(特殊情况是球面)、椭圓抛物面也同样成立，所以在射影几何里提高到用它作为二次曲面的定义这样重要的地位．

【习题】

1．在直紋面上一条母綫 l 上的各点的切平面通过 l．在一般的直紋面上 l 上的四点的交比等于这四点的四切平面所成的交比．(l 上的点和在这点的切平面之間的对应称为 Chasles **的对偶**.)

2．証明在直紋面上一点 $\mathbf{x}$ 的切平面与通过 $\mathbf{x}$ 的中央平面所成的角的正切和中心到 $\mathbf{x}$ 的距离成比例．

3．求单叶双曲面的腰綫．

4．当任意給定函数 $\alpha(u)$, $\beta(u)$, $\gamma(u)$ 时，証明以它們为直紋面的 Frenet 标形有关的 Frenet 公式的系数的直紋面一定存在．

3·5 可展面

如在(3·65)所示，直紋面的两母綫 $l(u)$, $l(u+\Delta u)$ 間的最短距离決定于 $\gamma(u)\Delta u+\cdots$，一般地它是 Δu 的一次无穷小量．如果

它是二次无穷小量，那末这种曲面就是使

$$\gamma(u)\equiv 0$$

的曲面在直紋面中必定是特别显著的，所以下面来討論它。

由于

$$|\mathbf{y}(u+\Delta u)-\mathbf{y}(u)\quad \mathbf{e}_1(u)\quad \mathbf{e}_1(u+\Delta u)|=\gamma\Delta u^2+\cdots,$$

对于柱面、錐面当然 $\gamma(u)\equiv 0$ 成立。在一般的情况下，点 $\mathbf{y}(u)$ 画腰綫；从 Frenet 公式(3·62)得到

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\mathbf{y}}{du}&=\alpha\mathbf{e}_1,\\ \frac{d\mathbf{e}_1}{du}&=\mathbf{e}_2,\\ \frac{d\mathbf{e}_2}{du}&=-\mathbf{e}_1+\beta\mathbf{e}_3,\\ \frac{d\mathbf{e}_3}{du}&=-\beta\mathbf{e}_2.\end{aligned}\right\}\tag{3·84}$$

这里第一式表示 $\mathbf{e}_1$ 是腰綫的切綫。可是为了考察(3·84)式和 $\mathbf{y}(u)$ 作为空間曲綫的 Frenet 公式，即

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\mathbf{y}}{ds}&=\xi_1,\\ \frac{d\xi_1}{ds}&=k\xi_2,\\ \frac{d\xi_2}{ds}&=-k\xi_1+w\xi_3,\\ \frac{d\xi_3}{ds}&=-w\xi_2\end{aligned}\right\}\tag{3·85}$$

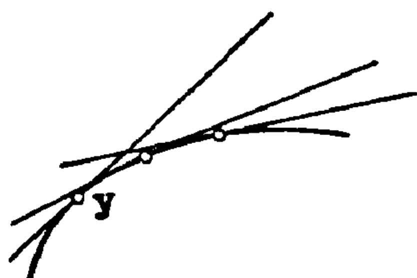


图 3·22

之間的关系，注意到 $\mathbf{e}_1$, ξ_1 都是单位向量，所以当 αdu 是正时，$\mathbf{e}_1=\xi_1$（当 αdu 是負时，改变母綫的方向），从而

$$\alpha du=ds,\tag{3·86}$$

这样，从 $(3·84)_2$, $(3·85)_2$ 得到 $\mathbf{e}_2=\xi_2$。因此看出 $\mathbf{e}_3=\xi_3$, $du=k\,ds$。另一方面，設 $\Delta\theta$ 是在点 s, $s+\Delta s$ 的切綫所成的角，$k=\dfrac{d\theta}{ds}$。所以

看出

$$du=d\theta. \tag{3·87}$$

把它代入(3·86)，便有 $\alpha=\frac{1}{k}$. 再从(3·84)$_3$，(3 85)$_3$ 得到

$$k(-\mathbf{e}_1+\beta\mathbf{e}_3)=-k\mathbf{e}_1+w\mathbf{e}_3,$$

所以 $\beta=\frac{w}{k}$.

这样一来，所論的直紋面不过是空間曲綫的切綫画成的曲面。同时还看到，(3 84)是把空間曲綫的 Frenet 公式不用弧长 s 而用参数 $u(\equiv\theta+c)$ 来表达出来的結果，称这样的曲面为**切綫曲面**.

很明显，反过来，空間曲綫的切綫曲面恒是 $\gamma\equiv 0$ 的直紋面.柱面、錐面和切綫曲面总称为**可展面**或**撓曲面**. 有时称非可展的直紋面为**斜曲面**.

現在要檢查切綫曲面卽空間曲綫的切綫所画成的曲面在这給定曲綫的邻域中的曲面形状.

以給定曲綫的弧长 s 为参数表达它，

$$\mathbf{y}=\mathbf{y}(s);$$

切綫曲面上的动点 $\mathbf{x}$ 是

$$\mathbf{x}(s,\ t)=\mathbf{y}(s)+t\xi_1(s). \tag{3·88}$$

为了檢查这切綫曲面在給定曲綫上一点邻域的形状，取所論点为量弧长的起点($s=0$)，而且把曲面的方程展开为 s, t 的幂級数，

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(s,\ t)=&\mathbf{x}(0,\ 0)+\mathbf{x}_s^0 s+\mathbf{x}_t^0 t\\&+\frac{1}{2}(\mathbf{x}_{ss}^0 s^2+2\mathbf{x}_{st}^0 st+\mathbf{x}_{tt}^0 t^2)+\cdots,\end{aligned}$$

式中 $\mathbf{x}_s^0$, $\mathbf{x}_t^0$ 等等表示 $\mathbf{x}_s$, $\mathbf{x}_t$ 等等在 $s=0$, $t=0$ 的值. 可是

$$\begin{aligned}&\mathbf{x}_s=\xi_1+kt\xi_2,\quad \mathbf{x}_t=\xi_1,\\&\mathbf{x}_{ss}=-k^2t\xi_1+(k+k't)\xi_2+kwt\xi_3,\\&\mathbf{x}_{st}=k\xi_2,\quad \mathbf{x}_{tt}=0\end{aligned}$$

等等，所以容易算出 $\mathbf{x}_s^0$, $\mathbf{x}_t^0$ 等等，而得到

$$\mathbf{x}(0,0)=\mathbf{y}(0),$$

$$\mathbf{x}_s^0=\mathbf{x}_t^0=\xi_1(0),$$

$$\mathbf{x}_{ss}^0=\mathbf{x}_{st}^0=k(0)\xi_2(0),\ \mathbf{x}_{tt}^0=0,$$

$$\mathbf{x}_{sss}^0=\mathbf{x}_{sst}^0=-k^2(0)\xi_1(0)+k'(0)\xi_2(0)+k(0)w(0)\xi_3(0).$$

因而，把 $k(0)$, $k'(0)$ 等等写成 k_0, k_0' 等等，便导出

$$\mathbf{x}(s,t)=\mathbf{y}(0)+z_1\xi_1(0)+z_2\xi_2(0)+z_3\xi_3(0),$$

式中

$$\left.\begin{aligned} z_1&=s+t-\frac{k_0^2}{6}s^3-\frac{k_0^2}{6}s^2t+\cdots,\\ z_2&=\frac{k_0}{2}s^2+k_0st+\frac{k_0'}{6}s^3+\frac{k_0'}{2}s^2t+\cdots,\\ z_3&=\frac{k_0w_0}{6}s^3+\frac{k_0w_0}{2}s^2t+\cdots. \end{aligned}\right\} \tag{3·89}$$

(3·89)式就是关于 $\mathbf{y}(0)$ 的 Frenet 标形把切綫曲面在 $\mathbf{y}(0)$ 的邻域表达出来的方程.

如果用給定曲綫在 $\mathbf{y}(0)$ 的法平面来截断曲面，它的截口曲綫是

$$z_1=s+t+\cdots=0.$$

把这个 s, t 的关系代进 z_2, z_3 里，截口曲綫是由参数方程

$$z_2=-\frac{k_0s^2}{2}-\cdots,$$

$$z_3=-\frac{k_0w_0s^3}{3}+\cdots$$

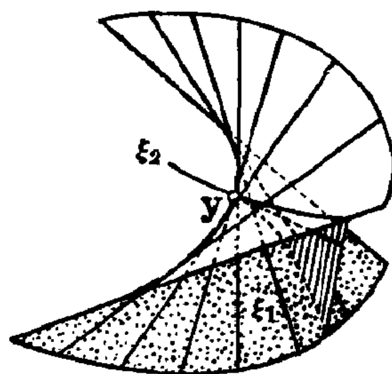


图 3·23

表达出来的. 如果 $k_0\neq0$, $w_0\neq0$, 这曲綫是以原点 $\mathbf{y}(0)$ 为尖点，而以 z_2 軸为其切綫的曲綫. 所以給定的曲綫在其切綫曲面上象刀刃一样形成尖銳的棱綫. 因此，称給定的曲綫为其切綫曲面的**脊綫**.

我們曾經用(3·81)給出直紋面的 Gauss 曲率. 从此可見，可

展面的Gauss曲率是0. 反过来也成立. 就是

定理 可展面的Gauss曲率是0. 反过来，Gauss曲率等于0的曲面是可展面.

在这定理的后半里显著的是,并没有把假設說成"Gauss曲率等于0的直紋面". 假設愈寬,証明則愈长,下面将述其証明.

設所論曲面的第二基本形式是

$$a\omega_1^2+2b\omega_1\omega_2+c\omega_2^2.$$

由于

$$K\equiv ac-b^2=0, \tag{3·90}$$

两系主切曲綫重合一致. 从

$$a:b=b:c$$

看出两微分形式

$$\omega_{13}=a\omega_1+b\omega_2,$$
$$\omega_{23}=b\omega_1+c\omega_2$$

成比例;把它置为0:

$$a\omega_1+b\omega_2=0, \tag{3·91}$$

便給出主切曲綫系. 現在取定这系为参数曲綫 $u=\text{const}$, 很明显地这两形式变为

$$\omega_{13}=c_{13}du,\quad \omega_{23}=c_{23}du. \tag{3·92}$$

其次,选取参数曲綫 $v=\text{const}$ 使与上述的 $u=\text{const}$ 的曲綫系构成直交曲綫系,即直交系統. 这样,由于

$$E=\mathbf{x}_u^2,\quad F=0,\quad G=\mathbf{x}_v^2,$$

可以取定

$$\mathbf{e}_1=\frac{\mathbf{x}_u}{\sqrt{E}},\quad \mathbf{e}_2=\frac{\mathbf{x}_v}{\sqrt{G}}, \tag{3·93}$$

从而

$$\left.\begin{aligned}&d\mathbf{x}=\omega_1\mathbf{e}_1+\omega_2\mathbf{e}_2,\\&\omega_1=\sqrt{E}\,du,\quad \omega_2=\sqrt{G}\,dv.\end{aligned}\right\} \tag{3·94}$$

如上所述,选取了参数曲綫之后,主切曲綫的微分方程是

$$du^2=0 \text{ 即 } a\omega_1^2=0,$$

所以 $b=0$, $c=0$, 从而看出

$$\left.\begin{aligned}&\omega_{13}-a\omega_1=c_{13}\,du,\\&\omega_{23}=0.\end{aligned}\right\} \tag{3·95}$$

可是把(3·95)代入結构方程

$$\left.\begin{aligned}&\omega'_{12}=[\omega_{13}\omega_{32}],\\&\omega'_{13}=[\omega_{12}\omega_{23}],\\&\omega'_{23}=[\omega_{21}\omega_{13}]\end{aligned}\right\} \tag{3·96}$$

的第三式,假如 $c_{13}\neq 0$, 就看到

$$[\omega_{12}\,du]=0,$$

$$\therefore\quad \omega_{12}=c_{12}\,du. \tag{3·97}$$

又把这式代入$(3·96)_1$,得到

$$[dc_{12}\,du]=0,$$

所以 c_{12} 单是 u 的函数. 同样,把(3·95)代入$(3·96)_2$,便有

$$[dc_{13}\,du]=0,$$

就是說, c_{13} 也单是 u 的函数.

从以上的事实首先导出,主切曲綫都是直綫. 实际上,从

$$d\mathbf{e}_2=-c_{12}\,du\mathbf{e}_1$$

可見, $\mathbf{e}_2$ 单是 u 的函数; 置 $u=\text{const}$, 那末 $d\mathbf{x}=\omega_2\mathbf{e}_2$, 所以它是 v 曲綫的切綫向量. 因此,所論曲面是直紋面.

我們曾經把 $c_{13}=0$ 的情况除外,但是,如果 $c_{13}=0$, 那末

$$d\mathbf{x}=\omega_1\mathbf{e}_1+\omega_2\mathbf{e}_2,$$

$$d\mathbf{e}_1=\omega_{12}\mathbf{e}_2,\quad d\mathbf{e}_2=-\omega_{12}\mathbf{e}_1,\quad d\mathbf{e}_3=0,$$

所以所論曲面实际是平面或者其一部分. 这当然是柱面的特殊情况.

現在重新回到 $c_{13}\neq 0$ 的情况. 把(3·94)代入結构方程

$$\omega_1' = [\omega_2\omega_{21}], \quad \omega_2' = [\omega_1\omega_{12}],$$

就有

$$(\sqrt{E}\,du)' = -\sqrt{G}\,c_{12}[dv\,du],$$

$$\therefore \quad (\sqrt{E})_v = -\sqrt{G}c_{12}. \qquad (3\cdot98)$$

在这里考察一点：$\mathbf{x}+\lambda(u, v)\mathbf{e}_2$，我們算出

$$(\mathbf{x}+\lambda\mathbf{e}_2)_u = \mathbf{x}_u+\lambda_u\mathbf{e}_2+\lambda\mathbf{e}_{2u}$$
$$= (\sqrt{E}-\lambda c_{12})\mathbf{e}_1+\lambda_u\mathbf{e}_2.$$

假定 $c_{12}\neq 0$，并且选取

$$\lambda c_{12} = \sqrt{E},$$

那末

$$\lambda_v c_{12} = (\sqrt{E})_v.$$

从这式和(3·98)得到

$$\lambda_v+\sqrt{G}=0.$$

因此，

$$(\mathbf{x}+\lambda\mathbf{e}_2)_v = \mathbf{x}_v+\lambda_v\mathbf{e}_2+\lambda\mathbf{e}_{2v}$$
$$= (\sqrt{G}+\lambda_v)\mathbf{e}_2=0.$$

当 $\lambda_u\neq 0$ 时，这表明了点 $\mathbf{x}+\lambda\mathbf{e}_2$ 单是 u 的函数，从而画一条曲線，而其切線是主切曲線 $u=\text{const}$. 所以我們所論的曲面是以曲線 $\mathbf{x}+\lambda\mathbf{e}_2$ 为脊綫的切線曲面. 当 $\lambda_u=0$ 时，它是以定点 $\mathbf{x}+\lambda\mathbf{e}_2$ 为頂点的錐面.

如果 $c_{12}=0$，那末 $d\mathbf{e}_2=0$，所以 $\mathbf{e}_2$ 是定向量，从而这时的曲面是柱面.

【习題】

1．設空間曲綫 C 的切綫曲面被 C 在点 s 的密切平面所截而生成一条平面曲綫 C^*，証明 C^* 在点 s 的曲率 k^* 与 C 的曲率 k 之間成立关系式 $k^*: k=3:4$.

2．当給定一族含有单参数 a 的曲面 $F(x_1, x_2, x_3, a)=0$ 时，对应于参数的同一值的曲面 $F=0$，$\frac{\partial F}{\partial a}=0$ 的交綫，称为单参数曲面族的**特征曲綫**.

当参数 a 变动时，这些特征曲綫画成的曲面，称为給定曲面族的**包絡面**．試証包絡面在特征曲綫上的各点和特征曲綫所在的原曲面相切。

3．当給定单参数曲面族 $F(x_1, x_2, x_3, a)=0$ 时，三个曲面 $F=0$，$\frac{\partial F}{\partial a}=0$，$\frac{\partial^2 F}{\partial a^2}=0$ 的交点随着 a 的变化画成的曲綫，称为給定曲面族的**脊綫**．証明特征曲綫和脊綫相切．

4．証明单参数平面族的包絡面是可展面，且从而在各母綫上的所有切平面是一定的直紋面必須是可展面，并且反过来也成立．

3·6 曲率綫

当曲面 S 上的曲綫 C 在其各点的切綫恒是指向法曲率变为极值的方向时，称 C 为 S 的**曲率綫**．C 要成为曲率綫的条件是，在 C 上的各点成立

$$b\omega_1^2+(c-a)\omega_1\omega_2-b\omega_2^2=0, \tag{3·99}$$

这就是曲率綫的微分方程．容易看出，这式还可改写为

$$\omega_1\omega_{23}-\omega_2\omega_{13}=0. \tag{3·100}$$

关于曲率綫成立下列定理：

定理 为了曲面 S 上的曲綫 C 要变为曲率綫的充要条件是，在 C 上的各点所引 S 的法綫构成可展面．

証明 曲綫 C 决定于用弧长 s 的参数表示

$$u=u(s),\quad v=v(s),\quad 0\leqslant s\leqslant L.$$

設对应于弧长 s 的点是 $\mathbf{x}(s)$，而且曲面在 $\mathbf{x}(s)$ 的法綫是 $\mathbf{e}_3(s)$，从 3·4 节看到所論的直紋面变成可展面的条件是：

$$|\mathbf{x}(s+\Delta s)-\mathbf{x}(s)\quad \mathbf{e}_3(s)\quad \mathbf{e}_3(s+\Delta s)|$$

关于 Δs 是三次以上的无穷小量．可是从(3·23)导出

$$\left|\frac{\omega_1}{ds}\mathbf{e}_1+\frac{\omega_2}{ds}\mathbf{e}_2\quad \mathbf{e}_3\quad -\frac{\omega_{13}}{ds}\mathbf{e}_1-\frac{\omega_{23}}{ds}\mathbf{e}_2\right|\Delta s^2+\cdots$$

$$=\left(\frac{\omega_1\omega_{23}-\omega_2\omega_{13}}{ds^2}\right)\Delta s^2+\cdots,$$

所以問題的条件是沿 C 成立

$$\omega_1\omega_{23}-\omega_2\omega_{13}=0.$$

这就是曲率綫的微分方程．因而証明了定理．球面上的曲綫都可以看做曲率綫，是从球面的所有法綫都通过球心这个事实明显表示出来的．这个事实相当于另一个事实，即球面仅由臍点做成，从而曲率綫的微分方程关于任意的 ω_1，ω_2 都成立．关于平面也是同样的．

反过来，我們将討論如何决定其上全由臍点做成的曲面．

首先，从假設看出：对于在这曲面各点唯一地确定的一阶标形的相对支量成立关系式

$$\omega_3=0,\quad \omega_{13}=a\omega_1,\quad \omega_{23}=a\omega_2. \tag{3·101}$$

外导微 $(3\cdot101)_2$ 的两边，按照 $(2\cdot26)$ 导出

$$[\omega_{1k}\omega_{k3}]=[da\,\omega_1]+a[\omega_k\,\omega_{k1}],$$

从此容易得到

$$[da\,\omega_1]=0.$$

同样，按照 $(3\cdot101)_3$ 的两边的外导微获得

$$[da\,\omega_2]=0.$$

因为 ω_1，ω_2 是独立的，由这二式可見，对于所求的曲面必須成立 $da=0$，就是 a 是常数．

先討論 $a=0$ 的情况．在这时候，

$$\omega_{13}=0,\quad \omega_{23}=0,$$

所以 $d\mathbf{e}_3=0$，从而 $\mathbf{e}_3$ 是定向量（支量是常数）．由于曲面的切綫 $\mathbf{x}_u$，$\mathbf{x}_v$ 和它垂直，

$$\mathbf{x}_u\mathbf{e}_3=0,\quad \mathbf{x}_v\mathbf{e}_3=0,$$

由此导出

$$(\mathbf{x}\mathbf{e}_3)_u=0,\quad (\mathbf{x}\mathbf{e}_3)_v=0.$$

因而 $(\mathbf{x}\mathbf{e}_3)$ 也是常数．記此值为 p，那末

$$\mathbf{x}\mathbf{e}_3=p,$$

这是以 $\mathbf{e}_3$ 为方向余弦的平面的方程。所以問題的曲面是平面的一部分或者平面本身。

$a\neq 0$ 的情况。在这时候，考察 $\mathbf{x}+\frac{\mathbf{e}_3}{a}$ 这样的一点，那末

$$d\left(\mathbf{x}+\frac{\mathbf{e}_3}{a}\right)=\omega_1\mathbf{e}_1+\omega_2\mathbf{e}_2+\frac{1}{a}(-a\omega_1\mathbf{e}_1-a\omega_2\mathbf{e}_2)$$
$$=0,$$

从而点 $\mathbf{x}+\frac{\mathbf{e}_3}{a}$ 是定点。这点与 $\mathbf{x}$ 的距离是 $\left(\frac{\mathbf{e}_3}{a}\right)^2=\frac{1}{a^2}$ 的平方根 $\frac{1}{|a|}$。所以問題的曲面是中心在 $\mathbf{x}+\frac{\mathbf{e}_3}{a}$ 而且半徑等于 $\frac{1}{|a|}$ 的球面的一部分或者这球面本身。

反过来，平面和球面很明显地仅仅由臍点构成。这样一来，得到

定理 仅仅由臍点构成的曲面只限于平面和球面，反过来也成立。

【习題】

1. 試求椭球 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 上的臍点。(如果一平面和在臍点的切平面平行，椭球与这平面的截綫是圓。)

2. 假設在三个函数 $x_i=x_i(u,v,w)$ 里置 $w=\text{const.}$ 时，得到一族以 u, v 为参数的 C''' 級曲面，置 $u=\text{const.}$ 或 $v=\text{const.}$ 时，也成立类似的事項。如果不同族的两曲面相交于曲綫，而且在其交綫上的每一点两曲面的切平面恒是直交，称这样的曲面集为**三重直交系**。証明在形成三重直交系的曲面集里不同族的两曲面的交綫在各曲面上都是曲率綫。

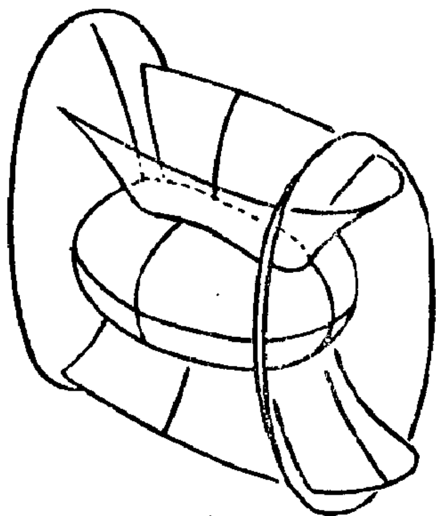


图 3·24

右上图表明共焦二次曲面族所形成的三重直交系. 在各曲面上的交綫都是曲率綫.

3. 在空間里取一个定点 O, 对于任意点 P 在連結 O 到 P 的半直綫上取 $OP \cdot OP' = r^2$ (r 常数) 的点 P' 和它对应, 称这样的点对应为**反演**, O 为**反演中心**. 設 S' 是运用反演 I 于曲面 S 而生成的曲面, 証明 S 上的曲率綫經过 I 的象是 S' 的曲率綫. 利用这結果来闡明球面和平面在反演下被移到球面和平面中的一种去.

3·7 結构方程的变形

从 3·3 看到, 如果对于曲面采用 Frenet 标形的連續系, 那末在各点都有一个对应标形, 而且成立关系

$$\left.\begin{aligned} d\mathbf{x} &= \omega_1\mathbf{e}_1 + \omega_2\mathbf{e}_2 \qquad\qquad (\omega_3=0), \\ d\mathbf{e}_1 &= \qquad\qquad \omega_{12}\mathbf{e}_2 + \omega_{13}\mathbf{e}_3, \\ d\mathbf{e}_2 &= -\omega_{12}\mathbf{e}_1 \qquad\quad + \omega_{23}\mathbf{e}_3, \\ d\mathbf{e}_3 &= -\omega_{13}\mathbf{e}_1 - \omega_{23}\mathbf{e}_2, \end{aligned}\right\} \tag{3·102}$$

式中

$$\omega_{13} = r_1\omega_1, \quad \omega_{23} = r_2\omega_2. \tag{3·103}$$

在这里 r_1, r_2 相当于以前写做 a, c 的量.

这样, 当采用 Frenet 标形系时, ω_i, ω_{ij} 都是以单独 u, v 的函数为系数的、关于 du, dv 的一次形式. 所以, 只要注意到 ω_1, ω_2 是独立的 Pfaff 形式, 很明显地可以写出

$$\omega_{12} = \rho_1\omega_1 + \rho_2\omega_2. \tag{3·104}$$

我們下面将叙述 r_1, r_2, ρ_1, ρ_2 的几何意义.

当点 $\mathbf{x}$ 沿 $\omega_2=0$ 所表的曲率綫方向推动时, 很明显地

$$d\mathbf{x} = \omega_1\mathbf{e}_1,$$

$$d\mathbf{e}_1 = \rho_1\omega_1\mathbf{e}_2 + r_1\omega_1\mathbf{e}_3.$$

从这第一式得知 $\mathbf{e}_1$ 是所論曲率綫的切綫向量. 又因为沿这曲率綫 $ds^2 = \omega_1^2$, $\dfrac{d\mathbf{e}_1}{\omega_1}$ 是所論曲率綫的曲率向量, 就是向着主法綫方

向而其长給出曲綫的曲率的向量. 从而,按照

$$\frac{d\mathbf{e}_1}{\omega_1}=\rho_1\mathbf{e}_2+r_1\mathbf{e}_3$$

所表示, r_1 是所論曲率綫的相对曲率, 而且 ρ_1 是其测地曲率. r_2, ρ_2 是由 $\omega_1=0$ 給定的曲率綫的相对曲率和測地曲率.

現在为要在 Frenet 标形的情况下导出結构方程的不同方式, 在这里稍做一点准备. 当任意給定一个函数 $f(u, v)$ 时, 因为 ω_1, ω_2 是独立的, 可以唯一地确定函数 $f_{,1}$, $f_{,2}$ 使

$$df=f_{,1}\omega_1+f_{,2}\omega_2. \tag{3·105}$$

沿曲率綫 $\omega_2=0$, ω_1 是弧长并且

$$\frac{df}{\omega_1}=f_{,1}.$$

又沿曲率綫 $\omega_1=0$, ω_2 是其弧长并且

$$\frac{df}{\omega_2}=f_{,2}.$$

所以 $f_{,1}$, $f_{,2}$ 是沿曲率綫表达函数 f 的变化率.

在結构方程中,按照(3·104)改写

$$\omega_i'=[\omega_k\omega_{ki}],$$

便获得

$$\left.\begin{aligned}\omega_1'=\rho_1[\omega_1\omega_2],\\ \omega_2'=\rho_2[\omega_1\omega_2].\end{aligned}\right\} \tag{3·106}$$

又詳細地写出

$$\omega_{ij}'=[\omega_{ik}\omega_{kj}]$$

如下式:

$$\left.\begin{aligned}\omega_{12}'=[\omega_{13}\omega_{32}],\\ \omega_{13}'=[\omega_{12}\omega_{23}],\\ \omega_{23}'=[\omega_{21}\omega_{13}],\end{aligned}\right\} \tag{3·107}$$

并从(3·103), (3·104)代入这里,而首先从$(3·107)_2$得到

$$[dr_1\omega_1]+r_1\omega_1'=\rho_1 r_2[\omega_1\omega_2].$$

在这里置

$$dr_1=r_{1,1}\omega_1+r_{1,2}\omega_2,$$

便导出

$$r_{1,2}[\omega_2\omega_1]+r_1[\omega_2(-\rho_1\omega_1-\rho_2\omega_2)]=\rho_1 r_2[\omega_1\omega_2],$$

$$\therefore\quad -r_{1,2}+r_1\rho_1=\rho_1 r_2$$

即

$$r_{1,2}=\rho_1(r_1-r_2). \tag{3·108}$$

同样,从(3·107)$_3$ 式得到

$$r_{2,1}=\rho_2(r_1-r_2), \tag{3·109}$$

式中已置

$$dr_2=r_{2,1}\omega_1+r_{2,2}\omega_2.$$

又从(3·104)看出

$$(\rho_1\omega_1+\rho_2\omega_2)'=-r_1r_2[\omega_1\omega_2],$$

$$\therefore\quad [d\rho_1\omega_1]+[d\rho_2\omega_2]+\rho_1\omega_1'+\rho_2\omega_2'=-r_1r_2[\omega_1\omega_2],$$

如果置

$$\left.\begin{aligned}d\rho_1&=\rho_{1,1}\omega_1+\rho_{1,2}\omega_2,\\ d\rho_2&=\rho_{2,1}\omega_1+\rho_{2,2}\omega_2,\end{aligned}\right\}$$

我們获得下列关系式:

$$-\rho_{2,1}+\rho_{1,2}=\rho_1^2+\rho_2^2+r_1r_2. \tag{3·110}$$

綜合以上結果,便可看出:对于 Frenet 标形系的基础方程是(3·102),(3·103),(3·104),而且結构方程是(3·108),(3·109),(3·110).

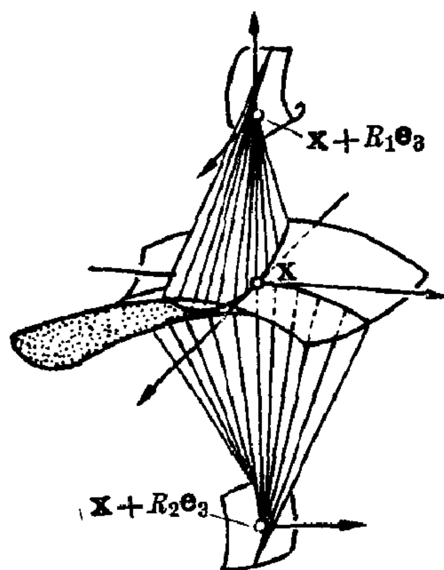


图 3·25

【习題】

1. 对于曲面 $\mathbf{x}=\mathbf{x}(u,v)$ 由 $\mathbf{x}(u,v)+R_1(u,v)\mathbf{e}_3$ 和 $\mathbf{x}(u,v)+R_2(u,v)\mathbf{e}_3$

給出的曲面，称为原曲面的**中心曲面**或者**漸屈曲面**。証明这些曲面是原曲面的法綫沿它的曲率綫所画可展面的脊綫的軌迹。

2. 在主曲率 r_1, r_2 之間存在着函数关系 $f(r_1, r_2)$ 的曲面，称为 **Weingarten 曲面**。証明 Weingarten 曲面的两中心曲面是以主切曲綫互相对应的，并且反过来也成立。特别地，在 $\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}=\text{const.}$ 的 Weingarten 曲面的两中心曲面上曲率綫互相对应，并且反过来也成立。

3. 証明：如果曲面的两系主切曲綫相交于定角，那末 $r_1:r_2=\text{const.}$，并且反过来也成立。

4. 关于曲面的 Frenet 标形导出点的不动条件。

3·8 曲面論的基本定理

我們在曲綫論里曾經証过定理(基本定理 II)：当任意給定函数 $k(s)>0$, $w(s)$, $0\leqslant s\leqslant L$ 时，以它們分別为曲率和撓率的曲綫必存在。下面将叙述在曲面論里与它对应的定理。相当于曲綫的曲率和撓率的量是具有稍許复杂的概念的第一、第二基本微分形式。先开始准备。

引理 設在单連通的領域 D 里变动的、而和两变数有关的 Pfaff 形式是

$$\left.\begin{aligned}\omega_i&=\alpha_i(u, v)du+\beta_i(u, v)dv,\\ \omega_{ij}&=\alpha_{ij}(u, v)du+\beta_{ij}(u, v)dv,\end{aligned}\right\}\qquad(3\cdot111)$$

并且它們滿足結构方程

$$\left.\begin{aligned}\omega_i'&=[\omega_k\omega_{ki}],\\ \omega_{ij}'&=[\omega_{ik}\omega_{kj}].\end{aligned}\right\}\qquad(3\cdot112)$$

那末一定可以确定运动群的参数 a_j, a_{ji} 为 u, v 的这样函数，使得关系式

$$\left.\begin{aligned}a_{ji}\,da_j&=\omega_i,\\ -a_{ji}da_{jk}&=\omega_{ik}\end{aligned}\right\}\qquad(3\cdot113)$$

关于 u, v 恒等地成立。而且对于任意的 $(u_0, v_0)\in D$，可以使

$a_j(u_0, v_0)$, $a_{ji}(u_0, v_0)$是任意給定值 a_j^0, a_{ji}^0, 并这时的解是唯一地确定的.

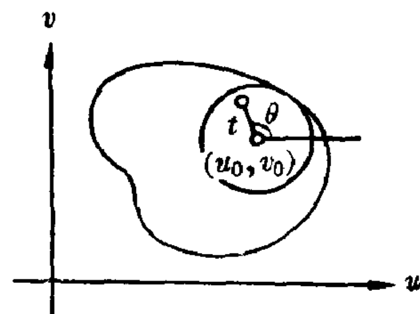


图 3·26

証明 首先以 (u_0, v_0) 为中心画出被包含在 D 内的最大半徑的圓 K, 并在这圓内置

$$\left.\begin{aligned} u&=u_0+t\cos\theta, \\ v&=v_0+t\sin\theta. \end{aligned}\right\} \tag{3·114}$$

(t, θ)是以点(u_0, v_0)为原点的极坐标.

在圓 K 内,

$$du=dt\cos\theta-t\sin\theta\,d\theta,$$
$$dv=dt\sin\theta+t\cos\theta\,d\theta,$$

所以 ω_i, ω_{ij} 变成

$$\left.\begin{aligned} \omega_i&=\lambda_i\,dt+\mu_i\,d\theta, \\ \omega_{ij}&=\lambda_{ij}\,dt+\mu_{ij}\,d\theta, \end{aligned}\right\} \tag{3·115}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} \lambda_i&=\alpha_i\cos\theta+\beta_i\sin\theta,\ \mu_i=(-\alpha_i\sin\theta+\beta_i\cos\theta)t, \\ \lambda_{ij}&=\alpha_{ij}\cos\theta+\beta_{ij}\sin\theta,\ \mu_{ij}=(-\alpha_{ij}\sin\theta+\beta_{ij}\cos\theta)t. \end{aligned}\right\} \tag{3·116}$$

这里 λ_i, …, μ_{ij} 都单是 t, θ 的函数. 現在,先把 θ 固定起来,而在"当 $t=0$ 时, a_j, a_{ji} 分别取值 a_j^0, a_{ji}^0"的初始条件下解出微分方程

$$\left.\begin{aligned} a_{ji}\frac{da_j}{dt}&=\lambda_i, \\ -a_{ji}\frac{da_{jk}}{dt}&=\lambda_{ik}. \end{aligned}\right\} \tag{3·117}$$

这解一定存在,并且是唯一的;如在 2·4 所述, a_{ji} 构成直交方陣.

可是 λ_i, λ_{ik} 也是 θ 的函数, 对于 θ 的每一值上列微分方程組必有解,所以随着 θ 的变动, a_j, a_{ji} 也都是 t, θ 的函数. 这些函数应当满足微分方程

$$\left.\begin{aligned} a_{ji}\frac{\partial a_j}{\partial t}&=\lambda_i,\\ -a_{ji}\frac{\partial a_{jk}}{\partial t}&=\lambda_{ik},\end{aligned}\right\} \tag{3·118}$$

而且无論 θ 是怎样，总要成立

$$a_j(0,\ \theta)=a_j^0,\quad a_{ji}(0,\ \theta)=a_{ji}^0. \tag{3·119}$$

如在 2·5 所述，$a_{ji}da_j$，$a_{ji}da_{jk}$ 满足結构方程．方便上，如果采用記法

$$a_{jt}=\frac{\partial a_j}{\partial t},\quad a_{j\theta}=\frac{\partial a_j}{\partial \theta},$$

首先从形如(3·112)的式导出

$$[a_{ji}(a_{jt}dt+a_{j\theta}d\theta)]'$$
$$=-[a_{jk}(a_{jt}dt+a_{j\theta}d\theta)a_{mk}(a_{mit}dt+a_{mi\theta}d\theta)].$$

比較两边 $[dtd\theta]$ 的系数，便得到

$$a_{jit}a_{j\theta}-a_{ji\theta}a_{jt}-a_{ji}a_{jt\theta}+a_{ji}a_{j\theta t}$$
$$=-a_{jk}a_{jt}a_{mk}a_{mi\theta}+a_{jk}a_{j\theta}a_{mk}a_{mit}. \tag{3·120}$$

可是根据假定对于給定的 ω_i，ω_{ij} 也成立結构方程，所以获得

$$(\lambda_i dt+\mu_i d\theta)'=[(\lambda_k dt+\mu_k d\theta)(\lambda_{ki}dt+\mu_{ki}d\theta)].$$

从而比較两边 $[dt\,d\theta]$ 的系数，导出

$$-\lambda_{i\theta}+\mu_{it}=\lambda_k\mu_{ki}-\mu_k\lambda_{ki}. \tag{3·121}$$

在这里注意(3·118)式，并从(3·120)边边减去(3·121)，容易看出

$$\frac{\partial}{\partial t}(a_{ji}a_{j\theta}-\mu_i)$$
$$=-(a_{mk}a_{mi\theta}+\mu_{ki})\lambda_k-(a_{jk}a_{j\theta}-\mu_k)\lambda_{ki}. \tag{3·122}$$

同上面的計算完全一样，从 $-a_{ji}da_{jk}$ 和对于給定的 ω_{ij} 的形如$(3·112)_2$ 的結构方程得到

$$\frac{\partial}{\partial t}(a_{mi}a_{mj\theta}+\mu_{ij})$$

$$= (a_{mk}a_{mj\theta}+\mu_{kj})\lambda_{ik}-(a_{mi}a_{mk\theta}+\mu_{ik})\lambda_{kj}. \qquad (3\cdot123)$$

現在,来考察和(3·122), (3·123)具有同型的綫性微分方程組

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\phi_i}{dt}&=-\phi_{ki}\lambda_k-\phi_k\lambda_{ki},\\ \frac{d\phi_{ij}}{dt}&=\phi_{kj}\lambda_{ik}-\phi_{ik}\lambda_{kj}.\end{aligned}\right\} \qquad (3\cdot124)$$

系数 λ_k, λ_{ki} 等都是 t, θ 的函数, 而 θ 則是看作为固定的. 这样一来,从在 2·3 所述的存在定理,很明显地导出: 这組微分方程对于 $t=0$ 时的 ϕ_i, ϕ_{ij} 的任意初始值必有解, 而且解是唯一的. 特别是,当 $t=0$ 时, 使 ϕ_i, ϕ_{ij} 都取 0 值的解,实际上恒等于 0.

可是从以上所述,函数

$$a_{ji}a_{j\theta}-\mu_i, \quad a_{mi}a_{mj\theta}+\mu_{ij}$$

是一組解. 又从(3·119)

$$(a_{ji}a_{j\theta})_{t=0}=0, \quad (a_{mi}a_{mj\theta})_{t=0}=0,$$

而且从(3·116)

$$(\mu_i)_{t=0}=0, \quad (\mu_{ij})_{t=0}=0.$$

所以这些解恒等于 0, 而对于所有的 t 成立

$$a_{ji}a_{j\theta}=\mu_i, \quad -a_{mi}a_{mj\theta}=\mu_{ij}. \qquad (3\cdot125)$$

这式对于所有的 θ 很明显地成立, 因而从 (3·115), (3·118), (3·125)看出关系式

$$a_{ji}\,da_j(t,\theta)=\lambda_i\,dt+\mu_i\,d\theta \quad (=\omega_i),$$

$$-a_{ji}\,da_{jk}(t,\theta)=\lambda_{ik}\,dt+\mu_{ik}\,d\theta \quad (=\omega_{ik}).$$

所以根据(3·114)把 $a_j(t,\theta)$, $a_{ji}(t,\theta)$的变数改为 u, v,就知道这些是在圓 K 內的所求的函数 $a_j(u,v)$, $a_{ji}(u,v)$.

当 D 和圓 K 不一致时, 取 K 中(u_0, v_0)以外的一点(u_1, v_1)为中心, 画出属于 D 的最大半徑的圓 K_1. 这样一来, 在圓 K_1 內同样地可以求出 (3·113) 的这样的解, 使得它满足下述的初始条

件：a_j, a_{ji} 在 (u_1, v_1) 分别取圓 K 内定义起来的函数 $a_j(u, v)$, $a_{ji}(u, v)$ 在 (u_1, v_1) 的值. 設这組解是 $\bar{a}_j(u, v)$, $\bar{a}_{ji}(u, v)$, 那末成立

$$\bar{a}_j(u_1, v_1) = a_j(u_1, v_1),$$

$$\bar{a}_{ji}(u_1, v_1) = a_{ji}(u_1, v_1).$$

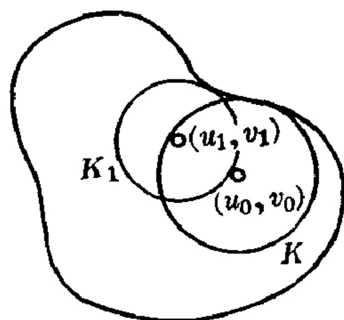


图 3·27

如果置

$$u = u_1 + t\cos\theta, \quad v = v_1 + t\sin\theta$$

而改成 t, θ 的函数来討論，两組函数 $a_j(t, \theta)$, $a_{ji}(t, \theta)$ 和 $\bar{a}_j(t, \theta)$, $\bar{a}_{ji}(t, \theta)$ 在 K, K_1 的公共部分具有同一初始条件，而且都是

$$a_{ji}\frac{\partial a_j}{\partial t} = \lambda_i, \quad -a_{ji}\frac{\partial a_{jk}}{\partial t} = \lambda_{ik}$$

的解，从而看出

$$\bar{a}_j(t, \theta) \equiv a_j(t, \theta), \quad \bar{a}_{ji}(t, \theta) \equiv a_{ji}(t, \theta).$$

由此可見，在 K 与 K_1 的公共部分里 $\bar{a}_j(u,v)$ 与 $a_j(u,v)$, $\bar{a}_{ji}(u,v)$ 与 $a_{ji}(u, v)$ 是一致的. 因而得知，在 K 和 $\bar{K}$ 的联合領域里可以決定一組函数 $a_j(u, v)$, $a_{ji}(u, v)$，使满足(3·113). 如果 D 与这領域不一致，只要重复同样的操作就够了. 很明显，解是唯一的.

在曲面論里相当于曲綫論的基本定理 I, II 的，有下列定理：

基本定理 設給定了 ω_1, ω_2 的两个微分形式

$$\omega_1^2 + \omega_2^2, \quad r_1\omega_1^2 + r_2\omega_2^2, \tag{3·126}$$

其中 ω_1, ω_2 是依賴二变数 u, v 的独立的 Pfaff 形式. 这时候，很明显地有这样的函数 ρ_1, ρ_2 使得

$$\omega_1' = \rho_1[\omega_1\omega_2], \quad \omega_2' = \rho_2[\omega_1\omega_2]; \tag{3·127}$$

如果 ρ_1, ρ_2 与 r_1, r_2 之間成立关系式

$$\left.\begin{aligned} &r_{1,2} = \rho_1(r_1 - r_2), \quad r_{2,1} = \rho_2(r_2 - r_1), \\ &\rho_{1,2} - \rho_{2,1} = r_1 r_2 + \rho_1^2 + \rho_2^2, \end{aligned}\right\} \tag{3·128}$$

那末以 (3·126) 的二形式分别为第一、第二基本微分形式(更詳細地說，以 ω_1, ω_2 分别为原点关于 Frenet 标形的相对支量，并以 r_1, r_2 为曲率綫的相对曲率) 的曲面一定存在，并且当把两个用运动可使之重合的曲面看成同一曲面时，所求的曲面是唯一的.

証明 置

$$\omega_{13}=r_1\omega_1,\quad \omega_{23}=r_2\omega_2,\quad \omega_{12}=\rho_1\omega_1+\rho_2\omega_2; \qquad (3\cdot129)$$

从給定条件看出，这些形式和

$$\omega_1,\ \omega_2 \quad (\omega_3=0)$$

满足結构方程. 因此，从引理得知：对于 (u_0, v_0) 采取任意的初始条件 a_j^0, a_{ij}^0 并满足

$$\left.\begin{aligned} a_{ji}\,da_j=\omega_i, \\ -a_{ji}\,da_{jk}=\omega_{ik} \end{aligned}\right\} \qquad (3\cdot130)$$

的函数 $a_j(u, v)$, $a_{ji}(u, v)$ 必存在. 現在考察由

$$x_i=a_i(u, v) \qquad (3\cdot131)$$

定义的图形. 置

$$\omega_i=\alpha_i(u, v)du+\beta_i(u, v)dv;$$

从(3·113)导出

$$a_{ji}\frac{\partial a_i}{\partial u}=\alpha_i,\quad a_{ji}\frac{\partial a_i}{\partial v}=\beta_i,$$

只要注意到 ω_1, ω_2 互相独立的事实，便看出矩陣 $\left(\frac{\partial a_i}{\partial u}\ \ \frac{\partial a_i}{\partial v}\right)$的秩数是 2，从而(3·131)是在 3·1 所述的曲面的参数表示.

在这曲面的各点，选取这样的伴随标形 $R_{a(u,v)}$，使得它是从絕对标形 R_0 經过变换

$$S_{a(u,v)}:\qquad x_i'=a_{ik}(u, v)x_k+a_i(u, v)$$

导出来的，即

$$R_{a(u,v)}=S_{a(u,v)}R_0.$$

根据 2·4，$R_{a(u+du,v+dv)}$ 关于 $R_{a(u,v)}$ 的相对位置决定于

$$\left.\begin{aligned} d\mathbf{M}&=\omega_1\mathbf{e}_1+\omega_2\mathbf{e}_2,\\ d\mathbf{e}_i&=\omega_{ik}\mathbf{e}_k. \end{aligned}\right\} \tag{3·132}$$

ω_i, ω_{ik} 原先是由 (3·130) 式的左边的式子决定起来的，而在我們的情况下可以看做給定的 ω_1, ω_2 以及按(3·129)給出的 ω_{ik}.

从$(3\cdot 132)_1$ 看到标形 $R_{a(u,v)}$ 在点 $a_i(u, v)$ 切于所論的曲面. 又从 ω_{13}, ω_{23} 的形状得知，标形 $R_{a(u,v)}$ 是 Frenet 标形，因而 r_1, r_2 是曲率綫的相对曲率.

現在設 Σ_{a^0} 是对应于初始条件 a_i^0, a_{ij}^0 的曲面，而且 Σ_{b^0} 是对应于别的初始条件 b_i^0, b_{ij}^0 的曲面. 我們将証用一个运动可把 Σ_{a^0} 移到 Σ_{b^0}. 首先很明显，有这样的运动 S_c 使得

$$S_{b^0}=S_cS_{a^0}.$$

可是

$$(S_cS_a)^{-1}(S_cS_{a+da})=S_a^{-1}S_{a+da},$$

所以标形系 S_aR_0 之間的相对支量与 $S_cS_aR_0$ 之間的相对支量相等. 而且后者对于 (u_0, v_0) 恰恰和 $S_{b^0}R_0$ 相对应. 由于当給定初始条件时，解是唯一的，对于(u_0, v_0) 以(b_i^0, b_{ij}^0)为初始条件的曲面 Σ_{b^0} 是 $S_cS_aR_0$ 的原点做成的，所以就是 $S_c\Sigma_{a^0}$. 这样一来，完全地証明了定理.

3·9 基本定理的变形

在曲綫論里曾經看到了曲率 $k(s)$ 和撓率 $w(s)$ 都是給定曲綫的不变式，但是光靠这两个能不能足够决定曲綫的特征，原先有过这样的疑問，而对于这个問題基本定理 I 給了解答. 在曲面的情况下，相当于不变式的是第一、第二基本微分形式(其系数满足相当于結构方程的条件式)，我們将証稍許变形了的对应定理："設二曲面之間給定了一对一的点对应，而且在对应点这些微分形式的值各各相等，那末二曲面必全等."

引理 假定有依赖二参数 u, v 的标形族 $R_{(u,v)}$ 和依赖二参数 $\bar{u}, \bar{v}$ 的标形族 $\bar{R}_{(\bar{u},\bar{v})}$。为了 (u, v) 平面上的 (u, v) 的領域 D 的点与 $(\bar{u}, \bar{v})$ 平面上的 $(\bar{u}, \bar{v})$ 的領域 $\bar{D}$ 的点之間能决定一对一的、可微分的对应

$$\bar{u}=\bar{u}(u, v), \quad \bar{v}=\bar{v}(u, v), \tag{3·133}$$

使得 $R_{(u,v)}$ 經过固定的合同变换 T 之后的象恒重合于 (u, v) 的对应点 $(\bar{u}, \bar{v})$ 的对应标形 $\bar{R}_{(\bar{u},\bar{v})}$，充要条件是：在(3·133)的对应点恒成立

$$\bar{\omega}_i=\omega_i, \quad \bar{\omega}_{ij}=\omega_{ij}. \tag{3·134}$$

証明 在空間里取絕对标形 R_0，而且設 $R_{(u,v)}$ 是对 R_0 运用变换

$$S_{(u,v)}: \qquad x_i'=a_{ij}(u, v)x_j+a_i(u, v)$$

之后得来的标形，即

$$R_{(u,v)}=S_{(u,v)}R_0. \tag{3·135}$$

这样一来，

$$\omega_i=S^{-1}_{(u,v)}S_{(u+du,\,v+dv)}. \tag{3·136}$$

同样，設 $\bar{R}_{(\bar{u},\bar{v})}$ 是对 R_0 运用变换

$$\bar{S}_{(\bar{u},\bar{v})}: \qquad x_i'=\bar{a}_{ij}(\bar{u}, \bar{v})x_j+\bar{a}_i(\bar{u}, \bar{v})$$

之后得来的，那末成立

$$\bar{R}_{(\bar{u},\bar{v})}=\bar{S}_{(\bar{u},\bar{v})}R_0, \tag{3·137}$$

$$\bar{\omega}_i=\bar{S}^{-1}_{(\bar{u},\bar{v})}\bar{S}_{(\bar{u}+d\bar{u},\,\bar{v}+d\bar{v})}. \tag{3·138}$$

必要性. 根据假定

$$\bar{R}_{(\bar{u},\bar{v})}=TR_{(u,v)},$$

从(3·135)，(3·137)看出

$$\bar{S}_{(\bar{u},\bar{v})}=TS_{(u,v)},$$

所以

$$\bar{S}^{-1}_{(\bar{u},\bar{v})}\bar{S}_{(\bar{u}+d\bar{u},\,\bar{v}+d\bar{v})}=(TS_{(u,v)})^{-1}(TS_{(u+du,\,v+dv)})=S^{-1}_{(u,v)}S_{(u+du,\,v+dv)},$$

从而成立

$$\bar{\omega}_i=\omega_i,\quad \bar{\omega}_{ij}=\omega_{ij}.$$

充分性。根据 2·5，标形族 $R_{(u,v)}$ 的相对支量 ω_i，ω_{ij} 满足結构方程，而且表达 $S_{(u,v)}$ 的 $a_j(u,v)$，$a_{jk}(u,v)$ 是

$$a_{ji}\,da_j=\omega_i,\quad -a_{ji}\,da_{jk}=\omega_{ik} \tag{3·139}$$

的一組解。关于 $\bar{a}_j(\bar{u},\bar{v})$，$\bar{a}_{jk}(\bar{u},\bar{v})$ 也有同样的事实。

現在，在 D 内选取一点 (u_0,v_0)，而設 $\bar{D}$ 内按(3·133)的对应点是 $(\bar{u}_0,\bar{v}_0)$。很明显，必有这样的运动 T，使得

$$\bar{S}_{(\bar{u}_0,\bar{v}_0)}=TS_{(u_0,v_0)}.$$

如果置 $\bar{R}^*_{(\bar{u},\bar{v})}=T^{-1}\bar{R}_{(\bar{u},\bar{v})}$，很明显地 $\bar{R}^*_{(\bar{u},\bar{v})}$ 的相对支量也是 $\bar{\omega}_i,\bar{\omega}_{ij}$。这时，

$$\bar{S}^*_{(\bar{u},\bar{v})}=T^{-1}\bar{S}_{(\bar{u},\bar{v})},$$

但是和以前不同之处是

$$\bar{a}^*_{(\bar{u}_0,\bar{v}_0)}=a_{(u_0,v_0)}.$$

所以 $\bar{a}^*_j(\bar{u}(u,v),\bar{v}(u,v))$，$\bar{a}^*_{jk}(\bar{u}(u,v),\bar{v}(u,v))$ 是 (3·139) 的解，并在 (u_0,v_0) 和 $a_j(u,v)$，$a_{jk}(u,v)$ 具有相同的初始条件。因此，从 3·8 的引理中所述的解的唯一性看出

$$\bar{S}^*_{(\bar{u},\bar{v})}=S_{(u,v)}.$$

这样一来，

$$\bar{S}_{(\bar{u},\bar{v})}=TS_{(u,v)}.$$

$$\therefore\quad \bar{R}_{(\bar{u},\bar{v})}=TR_{(u,v)}.$$ (証毕)

相当于曲綫論基本定理 I 的是下述的 Gauss 定理。

定理 設二曲面 S 和 $\bar{S}$ 的第一、第二基本形式分别是 I，II 和 $\bar{\mathrm{I}}$，$\overline{\mathrm{II}}$，为 S 和 $\bar{S}$ 要全等的充要条件是：S 和 $\bar{S}$ 之間有这样的一对一的点对应，使得

$$\mathrm{I}=\bar{\mathrm{I}},\quad \mathrm{II}=\pm\overline{\mathrm{II}}. \tag{3·140}$$

証明 必要性。如果二曲面可用运动使互相重合，那末很明

显地把重合的点作为对应点，便成立

$$\mathrm{I}=\bar{\mathrm{I}}, \quad \mathrm{II}=\overline{\mathrm{II}}.$$

当二曲面全等而不能互相重合时，对 $\bar{S}$ 运用关于某平面的对称变换 T 之后，設得来的曲面是 S^*，并且 $\bar{S}$ 在点 $\bar{\mathbf{x}}$ 的标形是 $\bar{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{e}}_1\bar{\mathbf{e}}_2\bar{\mathbf{e}}_3$，那末 S^* 在 $\bar{\mathbf{x}}$ 的对应点 $\mathbf{x}^*=T(\bar{\mathbf{x}})$ 的标形变为

$$\mathbf{e}_1^*=T(\bar{\mathbf{e}}_1), \quad \mathbf{e}_2^*=T(\bar{\mathbf{e}}_2), \quad \mathbf{e}_3^*=-T(\bar{\mathbf{e}}_3),$$

其中最后式不成为 $\mathbf{e}_3^*=T(\bar{\mathbf{e}}_3)$ 的理由是这样，假如 $\mathbf{e}_3^*=T(\bar{\mathbf{e}}_3)$ 的話，$\mathbf{e}_1^*\mathbf{e}_2^*\mathbf{e}_3^*$ 将不成为右手制了．很明显，

$$\mathrm{I}=\mathrm{I}^*,$$

并且

$$\begin{aligned}\mathrm{II}^*&=-d\mathbf{x}^*\cdot d\mathbf{e}_3^*=d(T\bar{\mathbf{x}})\cdot d(T\bar{\mathbf{e}}_3)\\&=d\bar{\mathbf{x}}\cdot d\bar{\mathbf{e}}_3=-\overline{\mathrm{II}}.\end{aligned}$$

充分性．当对于曲面 S 取 Frenet 标形时，我們得到

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{I}&=\omega_1^2+\omega_2^2,\\ \mathrm{II}&=\omega_1\omega_{13}+\omega_2\omega_{23}=r_1\omega_1^2+r_2\omega_2^2.\end{aligned}\right\} \tag{3·141}$$

現在考察微分形式 $r\mathrm{I}-\mathrm{II}$；要使它成为完全平方，就是要使

$$(r-r_1)\omega_1^2+(r-r_2)\omega_2^2$$

成为完全平方，只限于 $r=r_1$ 或者 r_2 的时候，而且这时分别地变为 $\pm\sqrt{r_1-r_2}\,\omega_2$，$\pm\sqrt{r_2-r_1}\,\omega_1$ 的平方．

假設二曲面 S，$\bar{S}$ 之間已經決定了这样的一对一的点对应，使得按照这个对应成立

$$\mathrm{I}=\bar{\mathrm{I}},\ \mathrm{II}=\pm\overline{\mathrm{II}}.$$

这样，便得到

$$r\mathrm{I}-\mathrm{II}=r\bar{\mathrm{I}}\mp\overline{\mathrm{II}}.$$

如果考察这个微分形式变为完全平方的情况，应当获得

$$\begin{aligned}r_1&=\pm\bar{r}_1, \quad (r_1-r_2)\omega_2^2=(r_1\mp\bar{r}_2)\bar{\omega}_2^2,\\ r_2&=\pm\bar{r}_2, \quad (r_2-r_1)\omega_1^2=(r_2\mp\bar{r}_1)\bar{\omega}_1^2,\end{aligned}$$

或者

$$r_1=\pm\bar{r}_2,\quad (r_1-r_2)\omega_2^2=(r_1\mp\bar{r}_1)\bar{\omega}_1^2,$$
$$r_2=\pm\bar{r}_1,\quad (r_2-r_1)\omega_1^2=(r_2\mp\bar{r}_2)\bar{\omega}_2^2.$$

后面的情况在对 $\bar{S}$ 調換指标 1, 2 的措施下归結到前面的情况，所以只須討論前面的情况就够了。上列二式边边相减，

$$(r_1-r_2)(\omega_1^2+\omega_2^2)=(r_1\mp\bar{r}_2)\bar{\omega}_2^2-(r_2\mp\bar{r}_1)\bar{\omega}_1^2.$$

可是 $\mathrm{I}=\bar{\mathrm{I}}$，并且 $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$ 是互相独立的，所以得到

$$r_1=\pm\bar{r}_1,\quad \omega_2^2=\bar{\omega}_2^2,$$
$$r_2=\pm\bar{r}_2,\quad \omega_1^2=\bar{\omega}_1^2.$$
（式中同时取正号或負号）

在另一方面，如果

(1) 改变 $\bar{\mathbf{e}}_1$ 的正向，那末 $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_{13}$ 仅改变符号，而 $\bar{\omega}_2$, $\bar{\omega}_{23}$, $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$ 則照旧；

(2) 改变 $\bar{\mathbf{e}}_2$ 的正向，那末 $\bar{\omega}_2$, $\bar{\omega}_{23}$ 仅改变符号，而 $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_{13}$, $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$ 則照旧。

所以有必要时，改变 $\bar{\mathbf{e}}_1$, $\bar{\mathbf{e}}_2$ 的正向，就可以使成立

$$\omega_1=\bar{\omega}_1,\quad \omega_2=\bar{\omega}_2, \tag{3·142}$$

并且

$$r_1=\pm\bar{r}_1,\quad r_2=\pm\bar{r}_2\quad（同时取正号或負号）. \tag{3·143}$$

这时候，要注意的是：当 $\bar{\mathbf{e}}_1$, $\bar{\mathbf{e}}_2$ 的一方改为 $-\bar{\mathbf{e}}_1$ 或 $-\bar{\mathbf{e}}_2$ 时，为了使 $\bar{\mathbf{e}}_1\bar{\mathbf{e}}_2\bar{\mathbf{e}}_3$ 仍旧移到右手制，$\bar{\mathbf{e}}_3$ 也必須改为 $-\bar{\mathbf{e}}_3$。$\bar{\mathbf{e}}_3$ 改为 $-\bar{\mathbf{e}}_3$ 的結果，只产生了变动

$$\bar{r}_1\to-\bar{r}_1,\quad \bar{r}_2\to-\bar{r}_2,$$

所以(3·142)，(3·143)仍旧保持原形不动。

在这里来討論 (3·143) 式的右边的正負号都取負号的情况。这时，設 T 是关于一个平面的点对称变换，而且 S^* 是曲面 $\bar{S}$ 在 T 下的象。由于

$$\mathbf{e}_1^*=T(\bar{\mathbf{e}}_1),\quad \mathbf{e}_2^*=T(\bar{\mathbf{e}}_2),\quad \mathbf{e}_3^*=-T(\bar{\mathbf{e}}_3),$$
$$\bar{\omega}_1=\omega_1^*,\quad \bar{\omega}_2=\omega_2^*,$$

$$\bar{\omega}_{12}=\omega_{12}^*,\quad \bar{\omega}_{13}=-\omega_{13}^*,\quad \bar{\omega}_{23}=-\omega_{23}^*,$$
$$\bar{r}_1=-r_1^*,\quad \bar{r}_2=-r_2^*.$$

所以从(3·143)看出

$$r_1=r_1^*,\quad r_2=r_2^*,$$
$$\omega_1=\omega_1^*,\quad \omega_2=\omega_2^*.$$

这就是在(3·143)里同时取正号的情况。

我們轉到討論在(3·143)里同时取正号的情況。这时，从

$$\omega_{13}=r_1\omega_1,\quad \omega_{23}=r_2\omega_2,$$
$$\bar{\omega}_{13}=\bar{r}_1\bar{\omega}_1,\quad \bar{\omega}_{23}=\bar{r}_2\bar{\omega}_2$$

也可看到

$$\omega_{13}=\bar{\omega}_{13},\quad \omega_{23}=\bar{\omega}_{23}$$

的成立。再把$(3·142)_1$外导微，便得到

$$[\omega_2\omega_{21}]=[\bar{\omega}_2\bar{\omega}_{21}],$$
$$\therefore\quad [\omega_2(\omega_{21}-\bar{\omega}_{21})]=0. \tag{3·144}$$

同样，外导微$(3·142)_2$，

$$[\omega_1\omega_{12}]=[\bar{\omega}_1\bar{\omega}_{12}],$$
$$\therefore\quad [\omega_1(\omega_{12}-\bar{\omega}_{12})]=0. \tag{3·145}$$

从(3·144)，(3·145)得知，$\omega_{12}-\bar{\omega}_{12}$既要具备$a\omega_1$的型，又要具备$b\omega_2$的型，所以

$$\omega_{12}=\bar{\omega}_{12}.$$

綜合以上的結果，便得到这样的結論：在S，$\bar{S}$之間可以决定这样的点对应，使得

$$\omega_1=\bar{\omega}_1,\quad \omega_2=\bar{\omega}_2\quad (\omega_3=\bar{\omega}_3=0),$$
$$\omega_{12}=\bar{\omega}_{12},\quad \omega_{13}=\bar{\omega}_{13},\quad \omega_{23}=\bar{\omega}_{23}.$$

所以根据本节的引理两曲面用运动完全可使互相重合。

在上列的(3·143)里，如果同时取負号，那末对$\bar{S}$运用关于一个平面的对称变换之后，得来的曲面S^*和曲面S用运动是可以互相重合的。无論在哪一情况，我們看出S，$\bar{S}$是全等的曲面。

第4章　曲面上的几何学

4·1　曲面上的几何学

在空間里考察直圓柱，設 a 是其軸的垂直平面的截口圓半徑。假設这个直圓柱是用薄紙做成的，沿一条母綫 l 用剪刀把它剪开，可以无伸縮地把它展开到平面上。所謂无伸縮地的意义是，在被剪开的其他部分上所画的任何曲綫，无論展开于平面上之前或展开之后，它們的长度总是相等的。

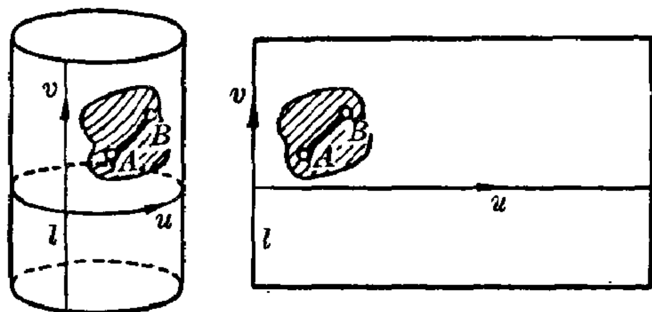


图　4·1

如上例所明示，当两曲面 $S, \bar{S}$（或分别地 $S, \bar{S}$ 的一部分 $D, \bar{D}$）的点与点之間能够决定一对一的連續点对应 T，使得在 T 下对应的曲綫 $C, \bar{C}$ 的长恒是相等时，称这对应（也叫映象）T 为**等长映象**，而称 S 与 $\bar{S}$（或者 D 与 $\bar{D}$）互为**等长**或者**互为可展**。上例的剪断了的直圓柱面可以連續地变形到平面上，使在变形中途的曲面也和原曲面是等长这个性质保持不变。象这样的連續变形称为**弯曲**。互相等长的两曲面不一定能从一个經过弯曲而变形到第二个去。

我們将証明，比直圓柱稍为复杂的可展面是和平面的一部分等长的。

設可展面的脊綫是 $\mathbf{y}(u)$（($0\leqslant u\leqslant L$) 弧长），它的 Frenet 标形是 $\mathbf{y}\xi_1\xi_2\xi_3$；那末可展面的表示式是

$$\mathbf{x}=\mathbf{y}(u)+v\xi_1(u),\quad 0\leqslant u\leqslant L,\ -\infty<v<+\infty.$$

因为 $\mathbf{x}_u=\xi_1+vk\xi_2$，$\mathbf{x}_v=\xi_1$，得到

$$ds^2=(1+v^2k^2)\,du^2+2\,du\,dv+dv^2.$$

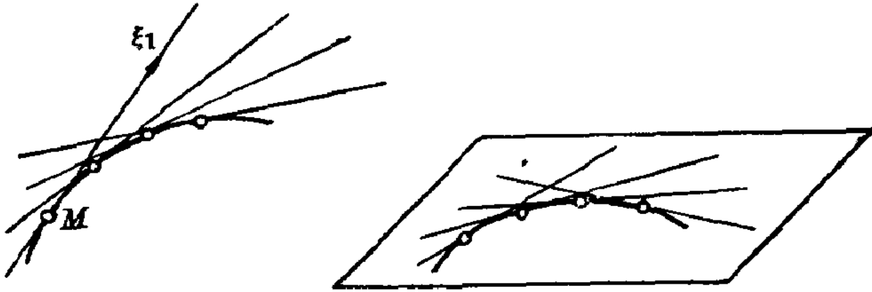


图　4·2

值得注意的是，在 ds^2 里脊綫的撓率并不出現．所以用和脊綫具有相同曲率 $k(u)$（撓率不相同）的任何曲綫来做切綫曲面应当有同一个 ds^2．因此，这样得出来的所有切綫曲面互为等长．特别是，考察和脊綫具有相同曲率 $k(u)$ 的平面曲綫 $\bar{\mathbf{y}}(u)$ 和其切綫向量 $\bar{\xi}_1$，并作出

$$\bar{\mathbf{y}}(u)+v\bar{\xi}_1(u);$$

如果把給定的可展面上的点 $(u,\ v)$ 和平面上对应于同参数值 (u,v) 的点互相对应起来，这是等长的对应．

設在二曲面

$$S:\qquad \mathbf{x}=\mathbf{x}(u,\ v),\qquad \bar{S}:\qquad \bar{\mathbf{x}}=\bar{\mathbf{x}}(\bar{u},\ \bar{v})$$

之間已經定下了等长的点对应

$$\bar{u}=\bar{u}(u,\ v),\quad \bar{v}=\bar{v}(u,\ v).$$

我們考察曲面 S 上的任意点 $(u_0,\ v_0)$ 的邻域和 $\bar{S}$ 上的对应点 $(\bar{u}_0,\bar{v}_0)$ 的邻域．在通过点 (u_0,v_0) 的 u 曲綫和 v 曲綫上从 (u_0,v_0) 各取长 p 和 q 的点 P 和 Q，并設从 $(\bar{u}_0,\ \bar{v}_0)$ 在所論 u 曲綫和 v 曲綫的象上量度同长 p 和 q 的点是 $\bar{P}$ 和 $\bar{Q}$，这两点分别是 P 和 Q 的

对应点。如果p, q在S上是同次的无穷小量，距离PQ和它們是同次的无穷小量．假如所論的u曲綫和v曲綫的象相切的話，$\bar{P}$，$\bar{Q}$的距离将变为高次的无穷小量，所以从等长的假設看出这些象也不相切．因此，在曲面$\bar{S}$上可以选取S上的参数曲綫的象作为它的参数曲綫．换句話說，在曲面S, $\bar{S}$上可以使对应点具有相同的参数．

在曲面S上的各点取一阶标形族，設其相对支量是ω_i, ω_{ij}，那末S上的曲綫

$$u=u(t), \quad v=v(t), \quad a\leqslant t\leqslant b$$

的长度决定于

$$\int_a^b \sqrt{\left(\frac{\omega_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{\omega_2}{dt}\right)^2}\,dt. \tag{4·1}$$

假定在等长的曲面S, $\bar{S}$上已經使对应点具有相同的参数．設在两曲面上的各点分别选好各一标形，使它們分别形成連續族．那末，在对应点，标形的相对支量之間应当成立关系

$$\omega_1^2+\omega_2^2=\bar{\omega}_1^2+\bar{\omega}_2^2. \tag{4·2}$$

可是ω_1, ω_2是独立的 Pfaff 形式，必須成立

$$\left.\begin{aligned}\bar{\omega}_1&=a_{11}\omega_1+a_{12}\omega_2,\\ \bar{\omega}_2&=a_{21}\omega_1+a_{22}\omega_2\end{aligned}\right\} \tag{4·3}$$

(a_{11}, $\cdots$, a_{22}是u, v的函数)．所以从(4·2)得出

$$a_{11}^2+a_{21}^2=1, \quad a_{12}^2+a_{22}^2=1,$$

$$a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}=0.$$

从而(4·3)不外乎是直交变换．

现在，如果对$\bar{S}$的所論标形族运用变换

$$\bar{\mathbf{e}}_\mu^*=a_{\lambda\mu}\bar{\mathbf{e}}_\lambda, \quad \lambda, \mu=1, 2, \quad \bar{\mathbf{e}}_3^*=\bar{\mathbf{e}}_3,$$

一方面

$$d\bar{\mathbf{x}}=\bar{\omega}_\lambda\bar{\mathbf{e}}_\lambda,$$

而另一方面

$$d\bar{\mathbf{x}}=\bar{\omega}^*_\mu \bar{\mathbf{e}}^*_\mu=\bar{\omega}^*_\mu a_{\lambda\mu}\bar{\mathbf{e}}_\lambda,$$

所以

$$\bar{\omega}^*_\mu a_{\lambda\mu}=\bar{\omega}_\lambda.$$

把这式和(4·3)相比較的結果,便得到

$$\bar{\omega}^*_\lambda=\omega_\lambda. \tag{4·4}$$

反过来,如果为了决定两个曲面之間一对一的連續点对应,能够适当地选取标形使得在对应点(4·4)式恒成立,很明显地这个点对应是两曲面的等长映象．因而,得出

定理　为了两个曲面 S, $\bar{S}$ 是等长的充要条件是,在两曲面上的各点适当地能选定各一标形而且决定这些点之間一对一的点对应,使得在对应点恒成立

$$\omega_1=\bar{\omega}_1,\quad \omega_2=\bar{\omega}_2.$$

設曲面上的向量意味着在曲面上的一点和曲面相切的向量．这些关于一阶标形是由 $\lambda_1\mathbf{e}_1+\lambda_2\mathbf{e}_2$ 的形式表达的,其长决定于 $\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}$．又 $\lambda_1\mathbf{e}_1+\lambda_2\mathbf{e}_2$ 和 $\mu_1\mathbf{e}_1+\mu_2\mathbf{e}_2$ 的两向量所成的角 θ 决定于

$$\cos\theta=\frac{\lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2}{\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}\sqrt{\mu_1^2+\mu_2^2}}. \tag{4·5}$$

特别是,在点 (u, v) 的切綫向量的方向也可用其方向的无穷小向量 $\omega_1\mathbf{e}_1+\omega_2\mathbf{e}_2$ 来表达．所以这样的两向量 $\omega_1(d)$, $\omega_2(d)$; $\omega_1(\delta)$, $\omega_2(\delta)$ 所成的角 θ 决定于

$$\cos\theta-\frac{\omega_1(d)\omega_1(\delta)+\omega_2(d)\omega_2(\delta)}{\sqrt{\omega_1(d)^2+\omega_2(d)^2}\sqrt{\omega_1(\delta)^2+\omega_2(\delta)^2}}.$$

由此可見:

如果两个曲面 S, $\bar{S}$ 是等长,在对应点的对应向量所成的角恒是相等的．

对于曲面上的曲綫曾經在(4·1)討論过它的长. 在曲面上取两点 A, B, 并考察連結 A 到 B 的、全部落在曲面上的所有曲綫的长, 其全体做成正数集, 称这集的最大下限为两点 A, B 的**在曲面上的距离**. (設所論的集是 M; 当属于 M 的任何数都是 $\geqslant k$ 时, 称 k 为 M 的下限. 而且在下限之中, 称其最大数 k_0 为 M 的最大下限.) 如果落在曲面上的、而且連結其上两点的曲綫之中, 有这么一条, 它的长給出这两点間的距离, 那末这条就是連結这两点的最短綫(或短程綫).

这个距离的概念是用积分(4·1)来定的, 所以它是仅依賴于曲面的第一基本形式的性质.

如从这些例子所看到的, 在曲面上图形的性质中有好些个对于等长映象是不变的. 这样, 在曲面或曲面上图形的性质中以研究对于曲面的等长映象是不变的性质, 就是以研究互为等长对应的所有曲面共有的性质, 也就是以研究只同第一基本微分形式相关联的性质为目的的几何, 称为**曲面上的几何学**.

曲面上的几何研究发端于 Gauss. 他是著名的数学家, 当过歌丁根 (Göttingen) 天文台的台长, 受政府的委托做过土地的测量. 据說, 曲面上的几何的思想是从測地学得到启发的.

在曲面或曲面上图形的性质中, 当然还有許多不属于曲面上的几何范疇的. 例如, 臍点、主切曲綫等都和第二基本形式有关联, 不是曲面上的几何的性质.

我們說, 我們住的宇宙是三維的空間. 所謂三維, 意味着具有前后、左右、上下的三个扩張. 如果把在这样意义下具有扩張的事实看成是空間的特点, 那末平面可以看成二維空間. 但是, 具有前后、左右的两个扩張的空間不仅是平面, 而正如住在地球表面上的我們, 尽管地球是有近于球面的形状, 但是总觉得局部是平坦的, 也有二維的扩張的感觉一样, 曲面都是具有二維扩張的. 所以我

們应当把所有曲面一律看成二維的空間。

原来一个曲面上的距离概念是从三維空間自然地导入于其上的

$$ds^2=\omega_1^2+\omega_2^2$$

給出的，如果我們把这曲面看作为本身就是一个二維的空間而不考虑它是在三維空間里的，那末曲面上的几何也可以說是这二維空間的几何了。

【习題】

1．証明具有綫素

$$ds^2=\frac{du^2-4v\,du\,dv+4u\,dv^2}{4(u-v^2)}$$

的曲面是可展开于平面上的。

2．在綫素 $ds^2=du^2+(u^2+a^2)dv^2$ 的曲面上，証明一系参数曲綫是主切曲綫，而另一系是曲率綫。

3．証明下述二曲面是局部地等长：第一曲面是把 x_1x_3 平面上繪出的悬鏈綫 $x_1=\frac{a}{2}(e^{\frac{x_3}{a}}+e^{-\frac{x_3}{a}})$ 繞 x_3 軸的周圍回轉而生成的曲面；第二个是把与 x_3 軸垂直相交的直綫繞 x_3 軸的周圍以等速度回轉的同时，又以等速度向 x_3 軸的正向前进而生成的曲面

$$x_1=r\cos\theta,\quad x_2=r\sin\theta,\quad x_3=a\theta.$$

4·2　測地綫

当曲面上一条曲綫 C 是由参数表示

$$u=u(t),\quad v=v(t),\quad a\leqslant t\leqslant b$$

給出的时候，这曲綫的长决定于

$$J=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{\omega_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{\omega_2}{dt}\right)^2}\,dt.$$

在曲面上連結两給定点 A，B 的所有曲綫中，求其长是最短的曲綫的問題，就是求曲綫 C 使积分 J 为最小的問題，它是属于数学分析的一个分科——变分学。这个問題和微积分里求函数 $f(x)$

的最小值的問題相类似，但是在前者相当于后者之中的变数 x 的值的是連結两点 A, B 而在給定曲面上具有某长度的曲綫，从而相当于变数 x 的領域的是連結 A, B 而在給定曲面上具有某长度的所有曲綫的集．这样的曲綫的多样性既不能用有限个变数来表示，又是在微积分里含有单变数或多变数函数的极大极小問題中所沒有的困难．

設曲綫弧 C:

$$u=u(t),\quad v=v(t),\quad a\leqslant t\leqslant b$$

是連結其两端点 $A(t=a)$, $B(t=b)$ 的最短綫，我們将找寻这些函数 $u(t)$, $v(t)$ 应該滿足的条件．

在 C 上的每一点用 $\omega_i(\delta)$ 表示无穷小向量关于各該点的标形 R_t 的相对支量，而且把 C 的点移动到这向量的終点．假定 $\omega_i(\delta)$ 同 t 一齐变动，并且

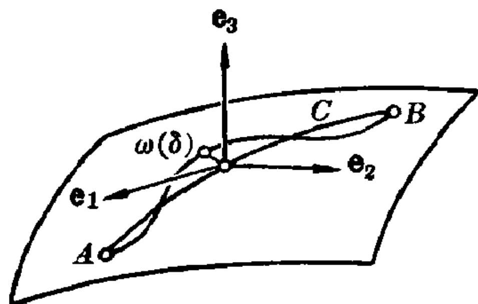


图 4·3

$$[\omega_i(\delta)]_{t=a}=[\omega_i(\delta)]_{t=b}=0. \tag{4·6}$$

那末按照 $\omega_i(\delta)$ 得到通过 A, B 而且无限接近于 C 的曲綫 $\bar{C}$．称 $\bar{C}$ 为 C 的**变分曲綫**．

由于随着如上所述的 C 的点的变分，C 的切綫向量 $\omega_i(d)$ 的变分是由 $\omega_i(d)+\delta\omega_i(d)$ 表达的，$\bar{C}$ 的长决定于

$$\int_a^b\sqrt{\left(\frac{\omega_1+\delta\omega_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{\omega_2+\delta\omega_2}{dt}\right)^2}\,dt.$$

略去高次的无穷小量来改写它，首先得出

$$\int_a^b\sqrt{\left(\frac{\omega_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{\omega_2}{dt}\right)^2+2\frac{\omega_1\delta\omega_1+\omega_2\delta\omega_2}{dt^2}}\,dt,$$

从此看出，它等于

$$\int_a^b \sqrt{\left(\frac{\omega_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{\omega_2}{dt}\right)^2}\,dt+\int_a^b \frac{\dfrac{\omega_1\delta\omega_1+\omega_2\delta\omega_2}{dt^2}}{\sqrt{\left(\dfrac{\omega_1}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{\omega_2}{dt}\right)^2}}\,dt.$$

第一项不外是 C 的长，并且

$$\left(\frac{\omega_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{\omega_2}{dt}\right)^2=\left(\frac{ds}{dt}\right)^2,$$

所以在省略高次项的情况下 $\bar{C}$ 与 C 的长度之差等于

$$\delta J=\int_a^b\left(\frac{\omega_1}{ds}\,\delta\omega_1+\frac{\omega_2}{ds}\,\delta\omega_2\right). \tag{4·7}$$

称 δJ 为积分

$$J=\int_a^b \sqrt{\left(\frac{\omega_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{\omega_2}{dt}\right)^2}\,dt$$

的**第一变分**.

現在为了要改写 δJ，从結构方程

$$\omega_1'=[\omega_2\omega_{21}],\quad \omega_2'=[\omega_1\omega_{12}]$$

得出

$$d\omega_1(\delta)-\delta\omega_1(d)=\omega_2(d)\,\omega_{21}(\delta)-\omega_2(\delta)\,\omega_{21}(d),$$
$$d\omega_2(\delta)-\delta\omega_2(d)=\omega_1(d)\,\omega_{12}(\delta)-\omega_1(\delta)\,\omega_{12}(d),$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{\omega_1(d)}{ds}\,\delta\omega_1(d)+\frac{\omega_2(d)}{ds}\,\delta\omega_2(d)&\\ =\frac{\omega_1(d)}{ds}&\left(d\omega_1(\delta)+\omega_2(\delta)\,\omega_{21}(d)\right)\\ &+\frac{\omega_2(d)}{ds}\left(d\omega_2(\delta)+\omega_1(\delta)\,\omega_{12}(d)\right).\end{aligned}$$

在作出这积分的过程中，对右边的第一、第三項运用分部积分之后，便获得

$$\begin{aligned}\delta J=&\left[\frac{\omega_1(d)}{ds}\,\omega_1(\delta)+\frac{\omega_2(d)}{ds}\omega_2(\delta)\right]_a^b\\ &-\int_a^b\left[\left\{\frac{d\omega_1(d)}{ds}+\frac{\omega_2(d)\,\omega_{21}(d)}{ds}\right\}\omega_1(\delta)\right.\\ &\qquad\left.+\left\{\frac{d\omega_2(d)}{ds}+\frac{\omega_1(d)\,\omega_{12}(d)}{ds}\right\}\omega_2(\delta)\right].\end{aligned}$$

可是从 (4·6)，右边的第一项是 0，所以終于得出

$$\delta J=-\int_0^L\Big[\Big\{\frac{d\omega_1(d)}{ds^2}+\frac{\omega_2(d)\,\omega_{21}(d)}{ds^2}\Big\}\omega_1(\delta)$$

$$+\Big\{\frac{d\omega_2(d)}{ds^2}+\frac{\omega_1(d)\,\omega_{12}(d)}{ds^2}\Big\}\omega_2(\delta)\Big]ds. \qquad (4\cdot 8)$$

如果曲綫 C 是連結两点 A, B 的最短綫，由 (4·8) 給出的 δJ 对于任何的 $\omega_1(\delta)$，$\omega_2(\delta)$ 都必須等于 0. 实际上，假如有了这样的变分 $\omega_1(\delta)$，$\omega_2(\delta)$ 使 $\delta J<0$ 的話，对应于这些的变分曲綫 $\bar{C}$ 的长比 C 要短些；又假如有了这样的 $\omega_1(\delta)$，$\omega_2(\delta)$ 使 $\delta J>0$ 的話，那末重新选取 $-\omega_1(\delta)$，$-\omega_2(\delta)$ 以代 $\omega_1(\delta)$，$\omega_2(\delta)$，那个对应的变分曲綫 $\bar{C}$ 的长因 $\delta J<0$ 要比 C 来得短些. 无論在哪一种情况下，这和 C 是 S 上連結 A, B 的最短綫这个假定相矛盾.

特别地在(4·8)置 $\omega_2(\delta)=0$，便看出

$$\int_0^L\Big[\frac{d\omega_1(d)}{ds^2}+\frac{\omega_2(d)\,\omega_{21}(d)}{ds^2}\Big]\omega_1(\delta)\,ds=0 \qquad (4\cdot 9)$$

对于任意的 $\omega_1(\delta)$ 必須成立. 从这个結果导出：沿 C 必須成立

$$\frac{d\omega_1}{ds^2}+\frac{\omega_2}{ds}\ \frac{\omega_{21}}{ds}=0. \qquad (4\cdot 10)$$

实际上，設 ε 是充分小的常数. 可以写下

$$\omega_1(\delta)=\varepsilon\phi(s),$$

从而(4·9)式具有形状

$$\varepsilon\int_0^L f(s)\phi(s)\,ds=0.$$

这式对于 $\phi(0)=\phi(L)=0$ 的任意函数 $\phi(s)$ 必須是 0. 假如在 $0\leqslant s\leqslant L$ 里有使 $f(s_1)\neq 0$ 的点 s_1 的話，因为 $f(s)$ 是連續函数，可以选取 $\varepsilon>0$，使 $f(s)$ 在 $|s-s_1|\leqslant\varepsilon$ 里和 $f(s_1)$ 有同一符号. 如果这样选取 $\phi(s)$，使得在 $|s-s_1|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$, $\phi(s)=1$，而在 $|s-s_1|\geqslant\varepsilon$, $\phi(s)=0$，那末上式左边的积分显然不等于 0，而发生矛盾. 因此，

在 $0\leqslant s\leqslant L$ 里 $f(s)\equiv 0$，这表明了(4·10)式的成立。

完全同样地看出，沿 C 成立

$$\frac{d\omega_2}{ds^2}+\frac{\omega_1}{ds}\frac{\omega_{12}}{ds}=0. \tag{4·11}$$

如果置

$$\omega_1=\alpha_1(u,\ v)du+\beta_1(u,\ v)dv,$$
$$\omega_2=\alpha_2(u,\ v)du+\beta_2(u,\ v)dv,$$

那末

$$\frac{\omega_1}{ds}=\alpha_1\frac{du}{ds}+\beta_1\frac{dv}{ds},$$

$$\frac{d\omega_1}{ds^2}=\alpha_1\frac{d^2u}{ds^2}+\beta_1\frac{d^2v}{ds^2}+\alpha_{1u}\left(\frac{du}{ds}\right)^2$$
$$+(\alpha_{1v}+\beta_{1u})\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+\beta_{1v}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2,$$

所以(4·10)，(4·11)两式可以分别地写成

$$\alpha_1\frac{d^2u}{ds^2}+\beta_1\frac{d^2v}{ds^2}+\gamma_1\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2\delta_1\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+\varepsilon_1\left(\frac{dv}{ds}\right)^2=0,$$
$$\alpha_2\frac{d^2u}{ds^2}+\beta_2\frac{d^2v}{ds^2}+\gamma_2\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2\delta_2\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+\varepsilon_2\left(\frac{dv}{ds}\right)^2=0.$$

由于 ω_1，ω_2 是独立的，

$$\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{vmatrix}\neq 0,$$

从上列二式可以解出 $\frac{d^2u}{ds^2}$，$\frac{d^2v}{ds^2}$，所以上列二式和形如

$$\frac{d^2u}{ds^2}+A_1\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2B_1\left(\frac{du}{ds}\right)\left(\frac{dv}{ds}\right)+C_1\left(\frac{dv}{ds}\right)^2=0,$$
$$\frac{d^2v}{ds^2}+A_2\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2B_2\left(\frac{du}{ds}\right)\left(\frac{dv}{ds}\right)+C_2\left(\frac{dv}{ds}\right)^2=0$$

的二式是等价的。因此，(4·10)，(4·11)两式虽然沒有被写成普通的形状，而其实是二阶联立微分方程組。

如果曲綫 C 是連結它的两端点的最短綫，C 的方程

$$u=u(s), \quad v=v(s), \quad 0\leqslant s\leqslant L \tag{4·12}$$

必須是微分方程組

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\omega_1}{ds^2}+\frac{\omega_2}{ds}\frac{\omega_{21}}{ds}=0,\\ \frac{d\omega_2}{ds^2}+\frac{\omega_1}{ds}\frac{\omega_{12}}{ds}=0\end{aligned}\right\} \tag{4·13}$$

的解．但是，反过来說，尽管 (4·12) 是这微分方程組的解，我們不能立刻判断曲綫 C 是連結它的两端点的最短綫．在微积分里，設 $f(x)$ 是在 $a\leqslant x\leqslant b$ 定义起来的可微分函数，給出 $f(x)$ 的最小值的点必須是 $f'(x)=0$ 的点，但是反过来，使 $f'(x)=0$ 的点不一定能給出 $f(x)$ 的最小值．有时是 $f(x)$ 的极大值，有时既不是极大又不是极小．在右图里所表示的函数 $y=f(x)$ 中，在 K_3 确实 $f'(x)=0$，但是那里既不是极大，又不是极小．我們所論的微分方程(4·13)，在把 J 比喻做 $f(x)$ 的情况下相当于 $f'(x)=0$ 的式子．这表明了，即使(4·12)是(4·13)的解，也沒有理由立刻来判断它是連結两端点的最短綫．

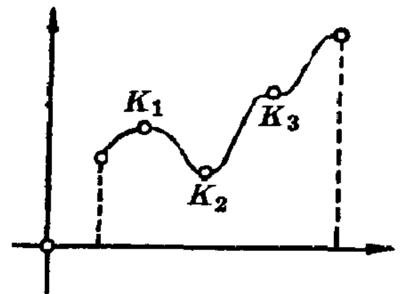


图 4·4

可是，当(4·12)是微分方程(4·13)的解时，我們約定称它为**測地綫**．

同函数 $f(x)$ 的极值的情况有一个显著的差别．在函数 $f(x)$ 的时候，象上图的 K_3 固然使 $f'(c_3)=0$，但是在 $a\leqslant x\leqslant b$ 上无論怎样取下 c_3 的充分小邻域，尙且不能說 $f(x)$ 在 c_3 取极值．可是在測地綫的时候同这恰恰相反，就是說，如果曲綫 (4·12) 是測地綫，在其弧上的任何部分只要选取充分小弧，便可証明在連結其端点 M, N 的曲面上所有曲綫之中給定曲綫 C 的部分弧 $\widehat{MN}$ 是最短．关于这个事实后文中稍有涉及，但是詳細内容只好让給变分

法的著书去說明了.

設在曲面上有一条曲綫 C, 对于其上的动点 $\mathbf{x}$ 成立

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds}=\frac{\omega_1}{ds}\mathbf{e}_1+\frac{\omega_2}{ds}\mathbf{e}_2.$$

从而

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2}=\frac{d\omega_1}{ds^2}\mathbf{e}_1+\frac{\omega_1}{ds}\frac{d\mathbf{e}_1}{ds}+\frac{d\omega_2}{ds^2}\mathbf{e}_2+\frac{\omega_2}{ds}\frac{d\mathbf{e}_2}{ds}.$$

由(3·23)代入这里,便得到

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2}=\left(\frac{d\omega_1}{ds^2}+\frac{\omega_2\omega_{21}}{ds^2}\right)\mathbf{e}_1+\left(\frac{d\omega_2}{ds^2}+\frac{\omega_1\omega_{12}}{ds^2}\right)\mathbf{e}_2$$
$$+\left(\frac{\omega_1\omega_{13}+\omega_2\omega_{23}}{ds^2}\right)\mathbf{e}_3. \tag{4·14}$$

$\frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2}$ 是朝着 C 的主法綫的方向的. 所以在 C 上的每一点它的密切平面要通过这点的曲面法綫的充要条件是 $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ 的系数等于 0, 即

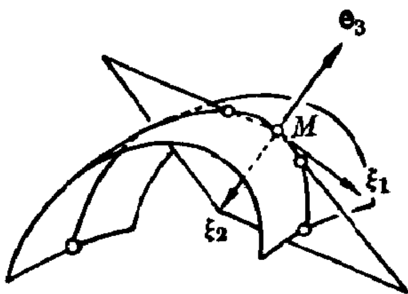


图　4·5

$$\frac{d\omega_1}{ds^2}+\frac{\omega_2}{ds}\frac{\omega_{21}}{ds}=0,$$

$$\frac{d\omega_2}{ds^2}+\frac{\omega_1}{ds}\frac{\omega_{12}}{ds}=0.$$

这不外乎是測地綫的微分方程. 因而得到

定理　为了在曲面 S 上的曲綫 C 的各点 $\mathbf{x}$ 密切于 C 的平面要通过曲面 S 在 $\mathbf{x}$ 的法綫,充要条件是: C 是一条測地綫.

容易知道,上列的微分方程又可写成

$$\frac{d\omega_1+\omega_2\omega_{21}}{\omega_1}=\frac{d\omega_2+\omega_1\omega_{12}}{\omega_2}. \tag{4·15}$$

根据 3·3, 曲面上的曲綫的曲率向量 $\frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2}$ 在切平面上的正射影,称为測地曲率,而且記做 $k_g(s)$. 可是从 (4·14) 得知这个正射影向量是

$$\left(\frac{d\omega_1}{ds^2}+\frac{\omega_2}{ds}\frac{\omega_{21}}{ds}\right)\mathbf{e}_1+\left(\frac{d\omega_2}{ds^2}+\frac{\omega_1}{ds}\frac{\omega_{12}}{ds}\right)\mathbf{e}_2,$$

所以

$$k_g^2=\left(\frac{d\omega_1}{ds^2}+\frac{\omega_2}{ds}\frac{\omega_{21}}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\omega_2}{ds^2}+\frac{\omega_1}{ds}\frac{\omega_{12}}{ds}\right)^2. \quad (4\cdot 16)$$

从这式明显地成立

定理 測地綫是以其測地曲率等于 0 的性质为特征的。

測地曲率决定于 (3·42)，而用 C 的副法綫 ξ_3 把它表成

$$k_g=k(\xi_3\mathbf{e}_3).$$

因而得到

定理 当两曲面沿一曲綫 C 相切时，这曲綫的各点在两曲面上有相同的測地曲率。

測地曲率原来表达曲綫的曲率向量在曲面切平面上的正射影的大小，而两曲面的切平面又是共同的，从几何方面也可以明了上述定理。

設曲面 S 上有一条曲綫 C，在 C 上的每一点作 S 的切平面，这样产生了依賴单参数的平面集，这集构成了以 C 在其各点的切綫方向的共軛切綫为母綫的可展面。曲面 S 和这可展面在 C 上的各点具有同一切平面，就是相切，所以上列定理适用于这里。所以 C 作为 S 的曲綫的測地曲率和作为这可展面的曲綫的測地曲率相等。可是从 (4·16) 和結构方程看出，測地曲率經过等长变換

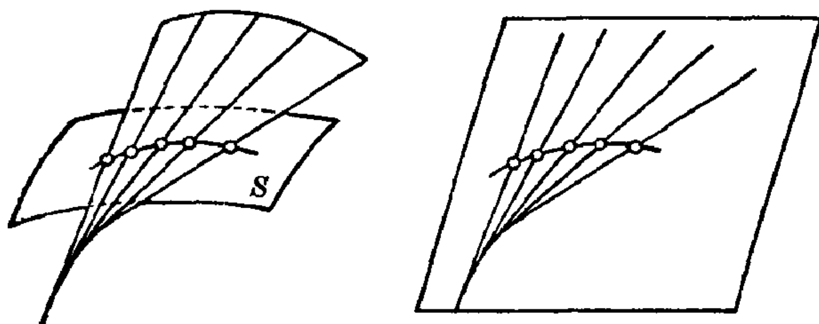


图 4·6

是不变的，所以把这可展面展开到平面上去，作为C的象而出現的曲綫C^*是一条平面曲綫，它的曲率和上面的測地曲率是一致的。因此，得到下列定理：

定理　在曲面S上的曲綫C的各点作S的切平面，当把所組成的可展面展开到平面上时，所生成的象的平面曲綫C^*在普通意义下的曲率等于C的測地曲率。

特别是，測地綫的測地曲率是0，所以測地綫根据上述方法被展开到平面上而成为直綫，并反过来也成立。

以上事項是在黎曼几何和其他几何里基本概念即所謂联絡、展开等概念的根源，在这意义上是非常重要的。

在曲面S上引C^1級的曲綫弧C，通过C的各点引垂直于C的測地綫。这些測地綫在充分短的范圍內，互不相交，而在曲面上构成具备下述性质的領域D。就是，通过D的各点而且属于所論曲綫族的測地綫恰恰有一条。在这情况下我們說，所論的測地綫族在D上构成**測地綫場**。

設曲面S上有一个測地綫場，选取它們为u曲綫，并选定同这測地綫族直交的曲綫（称为直截綫或直交軌綫）为v曲綫，就可得出参数表示。很明显，用这样的参数表示可把曲面的綫素表成

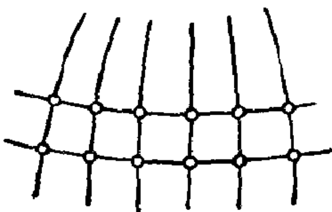


图　4·7

$$ds^2=E\,du^2+G\,dv^2\quad(F=0)。\tag{4·17}$$

又可明了，u曲綫和v曲綫的切綫向量$\mathfrak{e}_1$，$\mathfrak{e}_2$和曲面的法綫向量$\mathfrak{e}_3$一齐构成一阶标形族，并且

$$\omega_1=\sqrt{E}\,du,\quad \omega_2=\sqrt{G}\,dv。\tag{4·18}$$

可是成立結构方程

$$\omega_1'=[\omega_2\omega_{21}],\quad \omega_2'=[\omega_1\omega_{12}]。\tag{4·19}$$

在这里置

$$\omega_{12}=A\,du+B\,dv,$$

从(4·19)₁导出

$$(\sqrt{E})_v[dv\,du]=-A\sqrt{G}\,[dv\,du],$$

$$\therefore\quad A=-\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}.$$

同样得到

$$B=\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}},$$

所以

$$\omega_{12}=-\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}du+\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}dv.$$

由于 u 曲綫全是測地綫，把 $\omega_2=0$ 代到測地綫的微分方程之一，即

$$\frac{d\omega_2}{ds^2}+\frac{\omega_1}{ds}\frac{\omega_{12}}{ds}=0,$$

就获得

$$\sqrt{E}(\sqrt{E})_v\left(\frac{du}{ds}\right)^2=0,$$

所以 $(\sqrt{E})_v=0$. 因而，函数 $E(u, v)$ 和 v 无关. 如果把

$$\int^u\sqrt{E}du$$

重新写为 u，我們所論的曲面 S 的綫素表达式(4·17)变为如下的形状：

$$ds^2=du^2+G\,dv^2. \tag{4·20}$$

这样确定了的参数 u 显然是給定測地綫的弧长，从而注意到这些測地綫的直截綫是由 $u=\text{const}$ 所表达的事实，得出下列定理：

定理 設曲面 S 上有一个測地綫場，那末它們的两条直截綫从它們上面所截下的測地綫段的长是一定的.

一般地，直截綫并不是測地綫. 实际上，假如它也是測地綫的話，同上述的情况一样，可以导出 $(\sqrt{G})_u=0$，从而 $\omega_{12}=0$. 这样

一来，从

$$\omega'_{12} = -(ac-b^2)[\omega_1\omega_2] = -K[\omega_1\omega_2] \tag{4·21}$$

看出所論曲面的 Gauss 曲率必須等于0.

稍許学过一点非欧几里得几何的讀者們，应該能够回忆一下：在非欧几里得平面上与一直綫有一定距离的点的軌迹不成为直綫. 这个事实本来就是欧几里得几何与非欧几里得几何的显著的差别所在. 我們在上面所述的内容不妨看作为这个事实的拓广.

設在曲面 S 上給定了测地綫段 C. 如果有这样的测地綫場，在它的一条曲綫上作为部分弧把 C 包含进去，那末就說：C 在测地綫場中被**实現**了.

在这样的情况下可以把曲面的綫素取为 (4·20) 的形状. 現在，設 C 在 $v=v_0$ 上而且它的端点是 $A(u_0, v_0)$, $B(u_1, v_0)$，那末 C 的长是 u_1-u_0. 連結 A, B 而且在所論的测地綫場中的其他任何曲綫是由 $v=v(u)$ 所表示的，而且它的长决定于

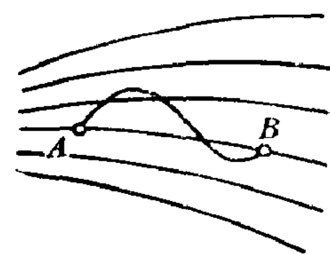


图 4·8

$$\int_{u_0}^{u_1}\sqrt{1+G\left(\frac{dv}{du}\right)^2}\,du.$$

这值是 $\geqslant u_1-u_0$. 所以得到下列定理：

定理 如果在曲面 S 上测地綫弧 C 能够被实現在测地綫場中，那末在連結 C 的端点 A, B 而且属于这場中的曲綫里，C 是最短的.

当测地綫段 $\widehat{AB}$ 比它所在的适当地小邻域中連結 A, B 的任何曲綫都来得短些时，称为具备**相对最短性质**. 上列定理表明，如果 $\widehat{AB}$ 能够在测地綫場中实現，它是相对地最短的. 但是，当任意地給定了测地綫段 $\widehat{AB}$ 时，不一定能够在测地綫場中得到实現. 例如，設半徑 a 的球面的一条子午綫从南极 S 起越过北极 N 而画成一条优弧 $\widehat{SMNT}$. 把平面 SMN 繞球心 O 的周圍回轉微小角

$\Delta\theta$，設所生成的子午綫是 $SM'N$。这样一来，$\widehat{SMNT}$ 的长 $=\{\widehat{SM'N}+\widehat{NT}\}$的长。可是折綫 $\widehat{SM'N}+\widehat{NT}$ 在北极 N 有一角点。从而，在这角点的两側如图所示选取靠近它的两点 P, Q 并用大圓弧連結起来，

$$\widehat{PN}+\widehat{NQ}>\widehat{PQ}.$$

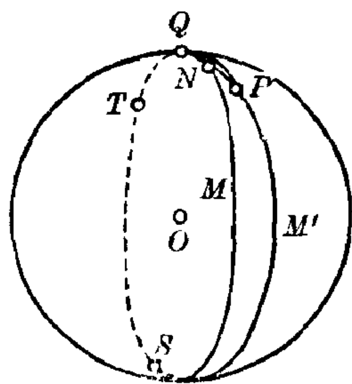


图 4·9

因此，$\widehat{SM'P}+\widehat{PQ}+\widehat{QT}$ 的长比 $\widehat{SMNT}$ 的长来得短些。$\Delta\theta$ 是任意微小角，所以在給定測地綫弧 $\widehat{SMNT}$ 的任何邻近总有比它短的曲綫。这就是說，这条測地綫弧不具备相对最短性质。

那末，当測地綫弧 $\widehat{AB}$ 被給定在曲面上时，从点 A 到 $\widehat{AB}$ 上的什么点为止才能具备相对最短性质，变成重要的問題。但是，由于这里需要变分学的知識，只好从略了。

即使是具备相对最短性质的測地綫段，在給定曲面上連結其两端点的所有曲綫之中是不是最短的，就是具备不具备絕对最短性质呢，这也不一定是这样的。

【习題】

1．設曲面 S 上的曲綫 C 在其上一点 M 的 S 的切平面上的正射影是曲綫 C^*，証明 C 在点 M 的測地曲率等于 C^* 在点 M 的普通意义下的曲率。

2．在平面上有不相交的直綫 l 和圓 C。当以 l 为軸回轉这平面时，C 所画的軌迹称为**环面**。試証环面决定于参数表示

$$x=r\cos\phi,\quad y=r\sin\phi,\quad z=a\sin\theta\quad (r=c+a\cos\theta),$$

并求它的測地綫。

3．設从曲面 S 上的一点 M 发出的一条測地綫是 g_0，在曲面上預先选定繞 M 的正回轉方向，而且对点 M 的邻域内的一点 P，設測地綫 $\widehat{MP}$ 和 g_0 所成的角是 φ，弧长 $\widehat{MP}$ 是 r(r 是适当小的正数)，称 (r, φ) 为以点 M 为原点的**測地极坐标**。称用 $r=$一定数給定的曲綫为**測地圓**(或**距离圓**)。証明在測

地极坐标系之下，

$$ds^2 = dr^2 + G(r, \varphi) d\varphi^2,$$

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial r^2}.$$

(距离圆的测地曲率一般地不是常数. 有时称测地曲率是一定的曲綫为**测地曲率圆**.)

4. 考察曲面 S 上半徑 r 的距离圆，設其周长是 L，面积是 F，証明在距离圆的中心的 S 的 Gauss 曲率是

$$K_0 = \lim_{r \to 0} \frac{3}{\pi} \frac{2\pi r - L}{r^3},$$

$$K_0 = \lim_{r \to 0} \frac{12}{\pi} \frac{\pi r^2 - F}{r^4}.$$

5. 設曲面上有两組分别依賴一个参数的测地綫族，如果不同族的任何两条测地綫相交于定角，証明所論的曲面是可展面。

4·3 Levi-Civita 的平行性

設在平面上有一点 P 和以 P 为端点的向量 $\mathbf{v}$，以同一平面上的其他一点 P' 为端点恰恰可引这样一条向量 $\mathbf{v}'$，使和 $\mathbf{v}$ 平行而且等长。在 E_3 里給定一个曲面的时候，在 S 上的点 P 的 S 的向量意味着 S 在 P 的切綫向量，即以 P 为端点而且属于 S 在 P 的切平面 π 的向量。当給定 S 在 P 的一条向量 $\mathbf{v}$ 时，要在 S 上的另外一点 P' 的切平面 π' 上引一条和 $\mathbf{v}$ 平行而且等长的向量，由于在 P, P' 的切平面一般地不是平行的，这种引法在普通意义下是不可能的。但是，1917 年意大利的 Levi-Civita 曾經作出平行性概念的拓广，下面将加以說明。

最初，假定 S 是可展面。这时候，S 可以等长映象到平面上，所以考察在这映象下 P, P' 的对应点 P^*, P'^* 以及在 P 的向量 $\mathbf{v}$ 的对应方向；从 P^* 朝这方向引一条同 $\mathbf{v}$ 等长的向量 $\mathbf{v}^*$，又从 P'^* 在普通平面几何的意义下引一条同 $\mathbf{v}^*$ 平行而且等长的向量 $\mathbf{v}'^*$。現在，設在上列等长映象下对应于 $\mathbf{v}'^*$ 而且同它等长的、在 P' 的向

量是 $\mathbf{v}'$，不妨称这向量 $\mathbf{v}'$ 为在 P' 平行于 P 的向量 $\mathbf{v}$ 的向量．映平面到它本身的等长变换只有平面上的普通合同变换，所以向量 $\mathbf{v}'$ 是唯一确定的．

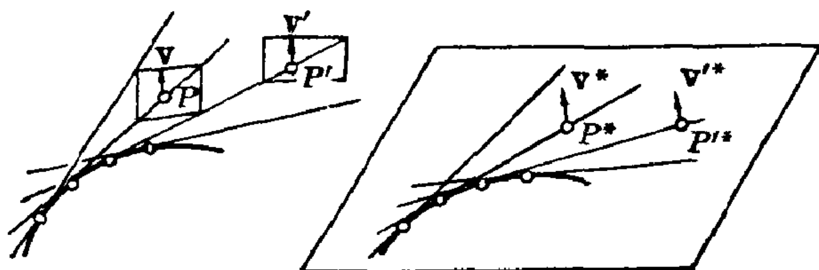


图 4·10

当曲面 S 不是可展面时，就不能如上所述地进行了．这时候，考察在曲面 S 上連結其两点 P，P' 的 C^1 級曲綫 C．在 C 的每一点都引切平面，这些平面是单参数平面族，所以包絡一个可展面．用 T_c 来記它．在 C 的各点引 S 的切綫使它和 C 在这点的切綫共軛，所引的切綫形成的直紋面是 T_c，而且这些切綫都切于 T_c 的脊綫．

S 在 P，P' 的切平面 π，π' 分别是 T_c 在点 P，P' 的切平面．从而，把 T_c 展开到平面上，設 $\mathbf{v}'$ 是 π' 上的向量，它和 π 上的向量 $\mathbf{v}$ 平行而且长度相等，我們說：$\mathbf{v}$，$\mathbf{v}'$ 是在曲面 S 上沿曲綫 C 而**在 Levi-Civita 的意义下平行的**．或者說：向量 $\mathbf{v}'$ 是沿曲綫 C 把向量 $\mathbf{v}$ 在 Levi-Civita 的意义下平行移动而得来的．提到 Levi-Civita 的平行性，就要注意平行这个語詞是在許多地方蘊涵初等几何中的同方向平行并且长度相等的意义来使用的．

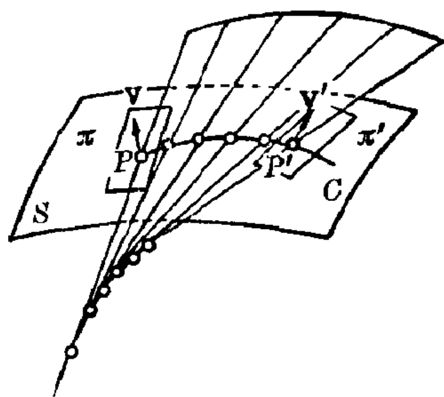


图 4·11

如图4·12的图所示，在半徑 a 的球面上作出它和从 O 有 $a\cos\phi$

的距离的平面的交綫即圓 C，在 C 上的一点 A 引球面的向量 $\mathbf{v}_0$ 使垂直于 C，然后沿 C 把向量 $\mathbf{v}_0$ 在 Levi-Civita 意义下平行移动，使它回到点 A 而变为向量 $\mathbf{v}_1$，这向量和 $\mathbf{v}_0$ 不一致. $\mathbf{v}_1$ 的作图可按下面所述进行.

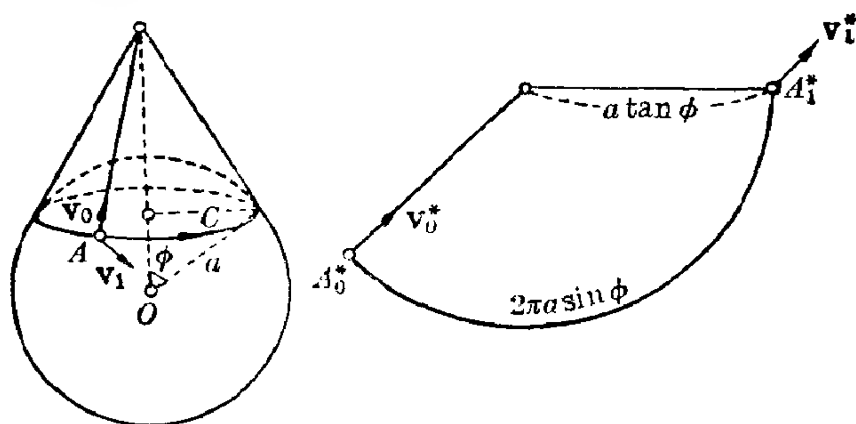


图 4·12

在 C 上的各点的切平面包絡一个直圓錐. 这直圓錐在 C 上的各点具有同 C 垂直的給定球面的切綫作为母綫. 現在把这直圓錐看做是薄紙造成的，把它沿点 A 的母綫切开而展开到平面上，如图 4·12 的右图所示，C 的象是半徑等于 $a\tan\phi$，弧长等于 $2\pi a\sin\phi$ 的圓弧.

設这圓弧的两端点如图所示是 A_0^*，A_1^*，在 A_0^* 引半徑上的向量 $\mathbf{v}_0^*$，而且在普通意义下，从 A_1^* 引平面上的和 $\mathbf{v}_0^*$ 平行的向量 $\mathbf{v}_1^*$. 这样一来，在点 A 引向量使它和所論直圓錐的母綫所成的角等于在点 A_1^* 的半徑和 $\mathbf{v}_1^*$ 所成的角，这条向量就是 $\mathbf{v}_1$.

很明显，向量的长对于 Levi-Civita 的平行移动是不变的. 在点 P 的两向量 $\mathbf{v}$，$\mathbf{w}$ 沿同一曲綫在 Levi-Civita 的意义下平行移动到点 P' 之后，$\mathbf{v}$，$\mathbf{w}$ 的交角 θ 的不变性从用 T_c 的展开所作出的 Levi-Civita 平行性的几何定义来看，几乎是明显的事实.

特别是，当 C 是 S 上的測地綫时，根据定理知道 C 也是曲面 T_c 上的測地綫. 从而，如果把 T_c 展开到平面上，C 的象 C^* 变为

直綫。由于在 Levi-Civita 意义下平行的向量被展开到平面上而成为欧几里得几何意义下平行的向量，这些向量同直綫 C^* 做成等角。可是在展开的时候角是不变的，所以沿測地綫 g 在 Levi-Civita 意义下平行的向量同 g 恒成等角。特别是，測地綫的切綫沿这測地綫本身是在 Levi-Civita 意义下平行的。在这意义下，有时称測地綫为**自平行曲綫**。这恰恰相当于平面上直綫是笔直的綫这个事实的拓广。

现在，为了求出 Levi-Civita 平行性的分析式，将考察把可展面 T_c 等长地映象到平面上的过程。可展面是一种直紋面，而它的母綫是被称为脊綫的一条曲綫的切綫。并且在一条母綫上的各点的切平面重合一致，从而切平面依賴单参数。相邻的两切平面的交綫就是母綫，而所論的直紋面是在图 4·13 这样的图形里相邻的母綫无限接近时的极限图形。要把这曲面展开到平面上，在右图說来是这样的：把母綫 g_1 的右侧的平面繞軸 g_1 回轉，使与 g_1 的左側的平面重合，又把这样得出来的图形繞軸 g_2 回轉，使与 g_2 的左側的平面重合，以下反复作出同样的操作，在母綫 g_{n-1} 的右側把这样生成的平面繞 g_{n-1} 軸回轉，使与 g_{n-1} 的左側的平面重合；这样一来，右图的图形就被展开到一平面去。

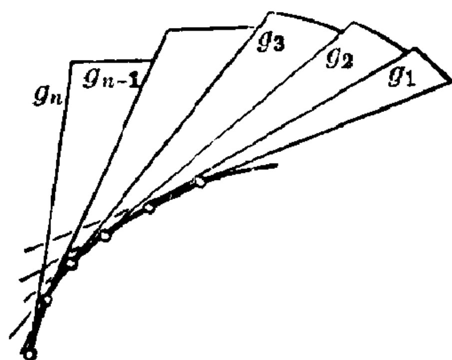


图 4·13

把这个事情摆在脑子里，应該看出下述事項的必要性。就是：为了討論 Levi-Civita 平行性，在平行移动賴以实现的所沿曲綫上取两个无限邻近点 $P(u, v)$，$P'(u+du, v+dv)$，設在这两点的切平面 π，π' 相交于直綫 l；当把 π' 繞軸 l 回轉使重合于 π 时，我們来檢查 π 和 π' 上究竟哪些向量是互相平行的。

首先在曲面上的各点各取一个一阶标形，使其全体做成一个連續族。这样一来，S 在点 $P(u, v)$ 的切平面 π 上的向量是由形如

$$\lambda_1\mathbf{e}_1+\lambda_2\mathbf{e}_2$$

的式子所表达的，并且在无限接近 P 的点 $P'(u+du, v+dv)$ 的切平面 π' 上的向量也是同样地由

$$\lambda_1'\mathbf{e}_1'+\lambda_2'\mathbf{e}_2' \tag{4·22}$$

所表达的. $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$ 是无限接近 $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ 的，所以成立

$$\mathbf{e}_1'=\mathbf{e}_1+d\mathbf{e}_1,\quad \mathbf{e}_2'=\mathbf{e}_2+d\mathbf{e}_2.$$

从而(4·22)又决定于

$$\lambda_1'(\mathbf{e}_1+d\mathbf{e}_1)+\lambda_2'(\mathbf{e}_2+d\mathbf{e}_2).$$

可是 P, P' 是无限接近的，在点 P' 能够和向量 $\lambda_1\mathbf{e}_1+\lambda_2\mathbf{e}_2$ 在 Levi-Civita 意义下平行的向量，同原向量只应該有无穷小的支量的差异而已，所以它的支量是由形如

$$(\lambda_1+d\lambda_1)(\mathbf{e}_1+d\mathbf{e}_1)+(\lambda_2+d\lambda_2)(\mathbf{e}_2+d\mathbf{e}_2) \tag{4·23}$$

的式子所表达的.

以 π, π' 的交綫 l 为軸，把 π' 回轉使重合于 π；我們要找寻的是 $\lambda_1'\mathbf{e}_1'+\lambda_2'\mathbf{e}_2'$ 的象向量，为此只須求出 $\mathbf{e}_1+d\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2+d\mathbf{e}_2$ 在这回轉后的象，而且对这些象乘上 $\lambda_1+d\lambda_1$, $\lambda_2+d\lambda_2$ 来作出綫性組合就够了.

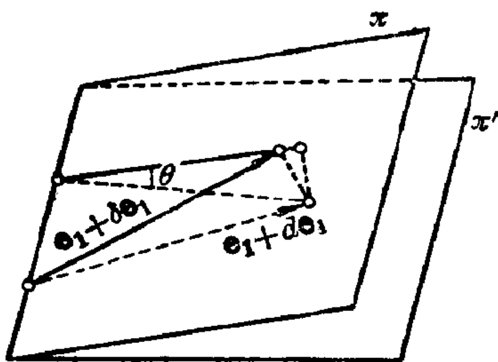


图　4·14

可是当繞軸 l 回轉 π' 使与 π 重合时，回轉角 θ 是无穷小量，所以 $\mathbf{e}_1+d\mathbf{e}_1$ 的象向量与 $\mathbf{e}_1+d\mathbf{e}_1$ 在 π 上的正射影向量 $\mathbf{e}_1+\delta\mathbf{e}_1$ 的差别关于无穷小 θ 是二次的. 因此，把二次的无穷小量略而不計，回轉 $\mathbf{e}_1+d\mathbf{e}_1$ 之后的象向量等于 $\mathbf{e}_1+\delta\mathbf{e}_1$,

从而可以用后者来代替前者。

可是 $\delta \mathbf{e}_i$ 是在 $d\mathbf{e}_i$ 中略去 $\mathbf{e}_3$ 的一项的，所以决定于

$$\left.\begin{aligned}\delta \mathbf{e}_1 &= \omega_{12}\mathbf{e}_2,\\ \delta \mathbf{e}_2 &= \omega_{21}\mathbf{e}_1.\end{aligned}\right\} \tag{4·24}$$

从此得到向量

$$(\lambda_1+d\lambda_1)(\mathbf{e}_1+d\mathbf{e}_1)+(\lambda_2+d\lambda_2)(\mathbf{e}_2+d\mathbf{e}_2)$$

的象向量

$$\begin{aligned}&(\lambda_1+d\lambda_1)(\mathbf{e}_1+\delta\mathbf{e}_1)+(\lambda_2+d\lambda_2)(\mathbf{e}_2+\delta\mathbf{e}_2)\\ &\quad=(\lambda_1+d\lambda_1+\lambda_2\omega_{21})\mathbf{e}_1+(\lambda_2+d\lambda_2+\lambda_1\omega_{12})\mathbf{e}_2.\end{aligned}$$

当这同 $\lambda_1\mathbf{e}_1+\lambda_2\mathbf{e}_2$ 平行而且等长时，即当

$$\left.\begin{aligned}d\lambda_1+\lambda_2\omega_{21}&=0,\\ d\lambda_2+\lambda_1\omega_{12}&=0\end{aligned}\right\} \tag{4·25}$$

时，在 P 的向量 $\lambda_1\mathbf{e}_1+\lambda_2\mathbf{e}_2$ 和在 P' 的向量

$$(\lambda_1+d\lambda_1)\mathbf{e}_1'+(\lambda_2+d\lambda_2)\mathbf{e}_2'$$

在 Levi-Civita 意义下是平行的。

当曲面 S 上的两点 P_0, P_1 相隔有限距离时，用 C^1 級的曲綫 C 連結这两点，而且要把在点 $P_0(u_0, v_0)$ 的向量 $\lambda_1^0\mathbf{e}_1^0+\lambda_2^0\mathbf{e}_2^0$（其中 $\mathbf{e}_1^0$, $\mathbf{e}_2^0$ 表示在点 (u_0, v_0) 的标形的向量）沿 C 平行移动到 P_1，来决定所生成的向量。为此，設 C 的方程是

$$u=u(s),\quad v=v(s),\quad s_0\leqslant s\leqslant s_1,$$

并且点 P_0, P_1 对应于 s 的值 s_0, s_1，那末求出微分方程

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\lambda_1}{ds}+\lambda_2\frac{\omega_{21}}{ds}&=0,\\ \frac{d\lambda_2}{ds}+\lambda_1\frac{\omega_{12}}{ds}&=0\end{aligned}\right\} \tag{4·26}$$

在初始条件："当 $s=s_0$ 时，$\lambda_1=\lambda_1^0$, $\lambda_2=\lambda_2^0$" 之下的解 $\lambda_1(s)$, $\lambda_2(s)$；所求的向量就决定于

$$\lambda_1(s_1)\mathbf{e}_1(s_1)+\lambda_2(s_1)\mathbf{e}_2(s_1).$$

在 Levi-Civita 平行性之下向量的长的不变性质和两个向量的交角的不变性质都是从几何方面容易明了的事实；但是如果用分析方法来証明，只須闡明两个向量的数量积是不变的．可是当两向量 $\lambda_1\mathbf{e}_1+\lambda_2\mathbf{e}_2$，$\mu_1\mathbf{e}_1+\mu_2\mathbf{e}_2$ 沿曲綫 C 是在 Levi-Civita 意义下平行时，从(4·26)和关于 μ_1，μ_2 的类似式立刻导出

$$\frac{d}{ds}(\lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2)=0.$$

Levi-Civita 的平行性与初等几何中的平行性尽管有很多类似的性质，但是这里有一个重大的差別．那就是，当在一点 A 的向量平行移到点 B 时，必須指定連 A 到 B 的曲綫 C，并且必須說出"沿 C"这句話．如果选取另外連 A 到 B 的曲綫 $\bar{C}$，对于在 A 的同一向量 $\mathbf{v}_0$ 所引在 B 的平行向量 $\mathbf{v}_1$，$\bar{\mathbf{v}}_1$ 一般地是不相同的．换言之，設 $\bar{C}^{-1}$ 是 $\bar{C}$ 向反对方向进行的曲綫，把 $\mathbf{v}_0$ 沿閉曲綫 $C+\bar{C}^{-1}$ 在 Levi-Civita 意义下平行移动之后，在 A 所生成的向量一般地不重合于 $\mathbf{v}_0$．讀者們可参照前面所举的沿球面上的圓的 Levi-Civita 意义下的平行移动例子．

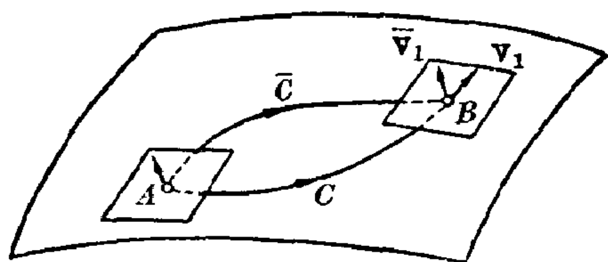


图　4·15

【习題】

設在曲面上沿参数曲綫 $u=u_0$，$u=u_0+\Delta u$，$v=v_0$，$v=v_0+\Delta v$（Δu，Δv 无穷小量）所圍成的四边形把在起点 (u_0, v_0) 的以 λ_1，λ_2 为支量的切綫向量在 Levi-Civita 意义下平行移动一周之后，所生成的向量的支量是 $\lambda_1+\Delta\lambda_1$，$\lambda_2+\Delta\lambda_2$，証明 $\Delta\lambda_1=-(F\lambda_1+G\lambda_2)K\Delta u\Delta v$，$\Delta\lambda_2=(E\lambda_1+F\lambda_2)K\Delta u\Delta v$．

4·4　Frobenius 定理

我們在3·2曾經敘述，把两变数 u，v 的 Pfaff 形式置为0的

式子

$$A(u,\ v)du+B(u,\ v)dv=0,$$

当 $B\neq 0$ 时，不外乎是微分方程

$$\frac{dv}{du}=-\frac{A}{B}.$$

为了对下节作准备，在本节将討論把 m 个变数的 r 个 Pfaff 形式置为 0 的方程組；如上所述一样，虽然不能把这組的解明显地表出，但作为联立微分方程組来考察，将証明其解的存在。

考察 m 个变数 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 的 r $(r<m)$ 个 Pfaff 形式

$$\theta_\alpha=A_{\alpha\lambda}(x)dx_\lambda. \tag{4·27}$$

其中假定

$$\alpha,\ \beta=1,\ 2,\ \cdots,\ r;\quad \lambda,\ \mu,\ \nu=1,\ 2,\ \cdots,\ m.$$

当然，$A_{\alpha\lambda}(x)$ 都是在数空間 $(x_1, \cdots, x_m)$ 的同一領域 D 定义起来的 C^1 級函数。

我們还假定 θ_α 是独立的，就是在 D 的各点 $(A_{\alpha\lambda})$ 的秩等于 r。

設 $(u_1, u_2, \cdots, u_s)$ 是在某領域 U 内变动的 s 个变数。当在 U 定义起来的 m 个函数

$$x_i=x_i(u_1,\ \cdots,\ u_s) \tag{4·28}$$

被代到 θ_α 而使 θ_α 恒等于 0 时，就是当

$$A_{\alpha\lambda}(x(u))\frac{\partial x_\lambda}{\partial u_a}=0\quad (a,\ b,\ c=1,\ 2,\ \cdots,\ s) \tag{4·29}$$

成立时，在 D 内由 (4·28) 所定义的 s 維曲面称为微分方程組

$$\theta_\alpha=0\quad (\alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ r) \tag{4·30}$$

的**积分流形**。

如果从 (4·28) 消去参变数 $u_1, \cdots, u_s$，积分流形又可写成下列形式：

$$f_p(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_m)=0,\quad p=s+1,\ \cdots,\ m. \tag{4·31}$$

如有必要，調換指标号碼之后也可局部地写成

$$x_p = x_p(x_1, \cdots, x_s), \quad p = s+1, \cdots, m. \tag{4·32}$$

很明显，为了按(4·32)表达的曲面要变成积分流形，条件是

$$A_{\alpha a}(x_b, x_q(x_c)) + \sum_p A_{\alpha p}(x_b, x_q(x_c)) \frac{\partial x_p}{\partial x_a} = 0, \tag{4·33}$$

式中 $a, b, c = 1, 2, \cdots, s$; $p, q = s+1, \cdots, m$.

我們特别地考察 $s = m - r$ 的情况. 当通过 D 的任意点 M_0 而在 M_0 的适当小邻域里存在(4·30)的 $m-r$ 維积分流形时，称微分方程組(4·30)为**完全可积分的.**

我們将求出(4·30)要是完全可积分的充要条件.

首先，作为必要条件容易看出下述事項:

微分方程 $\theta_\alpha = 0$ 的积分流形一定同时使 θ_α 的外微商等于0.

实际上，設(4·28)是 $\theta_\alpha = 0$ 的积分流形，那末成立

$$A_{\alpha\lambda}(x(u)) \frac{\partial x_\lambda}{\partial u_a} = 0.$$

这式对于 U 内的任意的 u 都必須成立，所以

$$\frac{\partial A_{\alpha\lambda}}{\partial x_\mu} \frac{\partial x_\mu}{\partial u_b} \frac{\partial x_\lambda}{\partial u_a} du_b + A_{\alpha\lambda} \frac{\partial^2 x_\lambda}{\partial u_a \partial u_b} du_b = 0.$$

从此和 du_a 作外积; 由于 $\frac{\partial^2 x_\lambda}{\partial u_a \partial u_b}$ 关于 a, b 是对称的，得到

$$\left[\frac{\partial A_{\alpha\lambda}}{\partial x_\mu} \frac{\partial x_\mu}{\partial u_b} du_b, \ \frac{\partial x_\lambda}{\partial u_a} du_a\right] = 0$$

即

$$[dA_{\alpha\lambda}, dx_\lambda] = 0.$$

这式的左边不外乎是 θ_α 的外微商.

θ_α 是独立的，从而矩陣 $(A_{\alpha\lambda})$ 的秩数是 r. 我們考察 D 的点 M_0 的适当小邻域 D_0; 必要时，調換指标 $1, 2, \cdots, m$ 而且假定

$$\det|A_{\alpha p}| \neq 0, \quad p = m-r+1, \cdots, m. \tag{4·33)'$$

这样一来，关于 dx_p 可以由下式解出:

$$\theta_\alpha = A_{\alpha a} dx_a + A_{\alpha p} dx_p,$$

由此可見，dx_p 是作为 dx_a 和 θ_α 的綫性組合表达出来的。所以 $d\theta_\alpha$ 这一个外微商确实是 $[dx_\lambda dx_\mu]$ 的綫性組合，这里把它表成为

$$\theta'_\alpha = \frac{1}{2} C_{\alpha ab}[dx_a dx_b] + D_{\alpha a\beta}[dx_a \theta_\beta] + \frac{1}{2} E_{\alpha\beta\gamma}[\theta_\beta \theta_\gamma].$$

可是当(4·30)是完全可积分时，对于这积分流形，成立 $\theta_\alpha = 0$ 的同时，还成立 $d\theta_\alpha = 0$。从上式必須在 D_0 成立

$$C_{\alpha ab}[dx_a dx_b] = 0.$$

但是，通过 D_0 的各点必存在 $m-r$ 維积分流形，所以这式意味着

$$C_{\alpha ab}(x) \equiv 0.$$

因此，成立关系式

$$\theta'_\alpha = D_{\alpha a\beta}[dx_a \theta_\beta] + \frac{1}{2} E_{\alpha\beta\gamma}[\theta_\beta \theta_\gamma]. \tag{4·34}$$

这关系式可以改写为

$$\theta'_\alpha = [\theta_1 \omega_{\alpha 1}] + [\theta_2 \omega_{\alpha 2}] + \cdots + [\theta_r \omega_{\alpha r}], \tag{4·35}$$

式中

$$\omega_{\alpha\beta} = -D_{\alpha a\beta} dx_a + \frac{1}{2} E_{\alpha\beta\gamma} \theta_\gamma. \tag{4·36}$$

这样，得到了下列的重要定理：

定理 (Frobenius) 微分方程組 $\theta_\alpha = 0 (\alpha = 1, 2, \cdots, r)$ 要变为完全可积分的充要条件是，外微商 θ'_α 可以表成(4·35)的形式。

如果借代数学的术語来表达，这时称为：θ'_α 属于由 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_r$ 生成的**环**。

証明 必要性已經証明过，所以下面証明充分性。为了要导出証明中所必需的关系式，暂时取已經知道了是完全可积分的 Pfaff 方程組 $\theta_\alpha = 0$ 来討論。

如上所述，在 D 的一点 M_0 的适当小邻域里不妨假定

$$\det|A_{\alpha p}(x)| \neq 0.$$

这时，关于 dx_p 可以由 $\theta_\alpha=0$ 解出，即从

$$A_{\alpha a}dx_a+A_{\alpha p}dx_p=0$$

得出，

$$dx_p=-B^{p\alpha}A_{\alpha a}dx_a, \tag{4·37}$$

式中 $(B^{p\alpha})$ 表示 $(A_{\alpha a})$ 的逆矩陣。

如果 $\theta_\alpha=0$ 是完全可积分，那末通过 M_0 的邻域的每一点，各各有形如

$$f_\alpha(x_1,\cdots,x_m)=0\quad(\alpha=1,\cdots,r) \tag{4·38}$$

的积分流形。导微它，便得到

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_a}dx_a+\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_p}dx_p=0, \tag{4·39}$$

而 (4·37) 式必須是因为 (4·38)，(4·39) 的成立而变成恒等式的。可是 f_α 是独立的函数，$(A_{\alpha p})$ 的秩数是 r，所以 (4·37) 与 (4·39) 在(4·38)成立的情况下必須是等价的。因此，从(4·37)式看出，所論的积分曲面可以写成

$$x_p=g_p(x_1,\cdots,x_{m-r}), \tag{4·40}$$

并且成立

$$\frac{\partial x_p}{\partial x_a}=-B^{p\alpha}A_{\alpha a}. \tag{4·41}$$

现在考察 $x_1,\cdots,x_{m-r}$ 等变数作成的 $m-r$ 維数平面和其一点 x_a^0(x_i^0 是点 M_0 的坐标，x_a^0 是其一部分)的邻域。通过 x_a^0 的直綫可以写成

$$x_a=x_a^0+\xi_a t\quad(\xi_a:\text{常数}). \tag{4·42}$$

由于

$$\frac{dx_a}{dt}=\xi_a, \tag{4·43}$$

两边乘(4·41)的結果，

$$\frac{dx_p}{dt}=\varphi_p(x_q,\ \xi_b,\ t),\tag{4·44}$$

式中成立

$$\varphi_p(x_q,\ \xi_b,\ t)=-B^{p\alpha}(\xi_b t,\ x_q)A_{\alpha a}(\xi_b t,\ x_q)\xi_a.\tag{4·45}$$

这就是說，通过点 M_0 的积分流形是可以写为(4·40)的形式的；如果把 $x_1,\ \cdots,\ x_{m-r}$ 置为(4·42)，那末它們的函数 x_p 是微分方程組(4·44)在初始条件："当 $t=0$ 时，$x_p=x_p^0$" 下的解。

以上是准备阶段，現在要轉到本定理的証明。假定在 m 維数空間的領域 D 的任意点 M_0，θ'_α 属于 θ_α 所作成的环，只要闡明在 M_0 的充分小邻域里 $m-r$ 維积分流形必存在。我們有必要时，調整指标号数，便不妨假定在 M_0 的邻域里 $\det|A_{\alpha p}|\neq 0$。因此，就可考察常微分方程組(4·44)，且作出它在初始条件：

"当 $t=0$ 时，$x_p=x_p^0$"

之下的解，并記为

$$x_p=x_p(\xi_b,\ t,\ x_a^0,\ x_q^0).$$

从(4·44)，(4·45)的形状也可改写它为

$$x_p=x_p\left(\frac{\xi_b}{c},\ ct,\ x_a^0,\ x_q^0\right).$$

因为它关于任意的 c 都成立，置 $c=\frac{1}{t}$，便得到

$$x_p=x_p(\xi_b t,\ 1,\ x_a^0,\ x_q^0).$$

从(4·42)看来，这意味着它还可写成

$$x_p=x_p(x_b,\ x_b^0,\ x_q^0).\tag{4·46}$$

我們下面将証明这就是通过点 $M_0(x_\lambda^0)$ 的积分流形，也就是說：(4·42)，(4·46)是通过点 M_0 的积分流形的参数表示。

为此，把(4·42)，(4·46)代进 θ_α，便看出

$$\theta_\alpha=P_{\alpha a}(\xi,\ t)d\xi_a+P_\alpha(\xi,\ t)dt,$$

而其实，右边的第二項并不出現。这是因为，当固定 ξ_a 时，(4·42)，

(4·46)合成一起变为 $\theta_\alpha=0$ 的解。因而，

$$\theta_\alpha = P_{\alpha a}(\xi, t)d\xi_a. \tag{4·47}$$

可是从定理的假設成立

$$\theta'_\alpha = \sum_\beta [\theta_\beta \omega_{\alpha\beta}]; \tag{4·48}$$

$\omega_{\alpha\beta}$ 也是 dx_λ 的一次形式,而且从(4·42)，(4·46)代进这里之后，

$$\omega_{\alpha\beta} = Q_{\alpha\beta}(\xi_b, t)dt + Q_{\alpha\beta c}(\xi_b, t)d\xi_c,$$

所以上式的右边变为

$$P_{\beta a}Q_{\alpha\beta}[d\xi_a dt] + [*][d\xi_c d\xi_a],$$

而且左边变为

$$\frac{\partial P_{\alpha a}}{\partial t}[dt\, d\xi_a] + [*][d\xi_c d\xi_a].$$

在这些式中[*]表示不必要知道其值的系数。因此,从(4·48)导出关系式

$$\frac{\partial P_{\alpha a}}{\partial t} + Q_{\alpha\beta}P_{\beta a} = 0. \tag{4·49}$$

我們看到了，对于每一个值 $a(a=1, 2, \cdots, m-r)$，r 个函数 $P_{\alpha a}(\xi, t)$ 是同一偏微分方程組 (4·49) 的解。可是当 $t=0$ 时，由 (4·42)，(4·46) 給出的 x_λ 无論怎样变动 ξ_a 总表同一点 $M_0(x_0^\lambda)$，所以当 $t=0$ 时,无論 ξ_a 怎样，$dx_a=\xi_a dt$，$dx_p=\varphi_p dt$，从而 θ_α 同 dt 成比例。因而从(4·47)看出 dt 的系数是 0 的同时，

$$P_{\alpha a}(\xi, 0)=0.$$

这样一来,按照微分方程組(4·49)的解的唯一性获得

$$P_{\alpha a}(\xi, t)\equiv 0.$$

就是說,把由 (4·42)，(4·46) 給出的 x_a, x_p 代入 θ_α，便恒等于 0。这表明了，(4·42)，(4·46) 式是通过点 M_0 的 $\theta_\alpha=0$ 的积分流形的参数表示。因此，已經明确了通过 M_0 的 $m-r$ 維积分流形的存在。因为 M_0 是 D 的任意点，(4·30) 在 D 是完全可积分的。

4·5 曲面的等长对应

我們以前曾經讲了两曲面 S, $\bar{S}$ 是等长的定义,幷且闡明了两曲面 S, $\bar{S}$ 要变成等长的充要条件是:在它們上面适当地选定一阶标形的連續系,可以使关于这些一阶标形的相对支量之間成立

$$\omega_1=\bar{\omega}_1, \quad \omega_2=\bar{\omega}_2. \tag{4·50}$$

但是,这些条件式本身是微分方程,而且 ω_1, ω_2; $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$ 又不是关于 Frenet 标形的支量,因此上列条件式幷不是用两曲面的不变式表达起来的.

下面将用(4·50)进一步找寻曲面 S, $\bar{S}$ 变为等长的必要条件,而且用它来叙述怎样按照两曲面的不变式判别它們是否等长的方法.

首先,当两曲面 S, $\bar{S}$ 是等长时,假定已选好标形族使(4·50)成立.由于 $\omega_3=0$, $\bar{\omega}_3=0$, 外导微 $(4·50)_1$ 之后,

$$[\omega_2\omega_{21}]=[\bar{\omega}_2\bar{\omega}_{21}],$$

由此再从(4·50)得出

$$[\omega_2(\omega_{12}-\bar{\omega}_{12})]=0.$$

同样,从 $(4·50)_2$ 获得

$$[\omega_1(\omega_{12}-\bar{\omega}_{12})]=0.$$

在这里应用 Cartan 引理得知 $\omega_{12}-\bar{\omega}_{12}$ 既要是 $\alpha\omega_1$, 又要是 $\beta\omega_2$. 为此,必須是 $\alpha=\beta=0$, 所以知道

$$\omega_{12}=\bar{\omega}_{12}. \tag{4·51}$$

現在,外导微 (4·51) 的两边,幷按 $(3·107)_1$ 式改写,

$$[\omega_{13}\omega_{32}]=[\bar{\omega}_{13}\bar{\omega}_{32}].$$

如果把关系式

$$\left.\begin{aligned}\omega_{13}&=a\omega_1+b\omega_2,\\ \omega_{23}&=b\omega_1+c\omega_2;\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\bar{\omega}_{13}&=\bar{a}\bar{\omega}_1+\bar{b}\bar{\omega}_2,\\ \bar{\omega}_{23}&=\bar{b}\bar{\omega}_1+\bar{c}\bar{\omega}_2\end{aligned}\right\}$$

代人上式,便获得

$$(ac-b^2)\,[\omega_1\omega_2]=(\bar{a}\bar{c}-\bar{b}^2)\,[\bar{\omega}_1\bar{\omega}_2],$$

而且从(4·50)看出关系式

$$ac-b^2=\bar{a}\bar{c}-\bar{b}^2.$$

按照 (3·51) 看来,这式的两边分别地是曲面 S, $\bar{S}$ 的 Gauss 曲率 K, $\bar{K}$. 因此,得到

定理(Gauss)　如果两曲面是互为等长,在对应点的 Gauss 曲率必相等.

以上是准备阶段,現在将求出两曲面 S, $\bar{S}$ 要互为等长的充要条件. 对这問题区分种种的情况进行討論.

1° K 是常数的情况.

同 S 等长的曲面 $\bar{S}$ 也必須有同一常数的 Gauss 曲率. 可是两曲面以同一常数 K 为其 Gauss 曲率也是为了等长的充分条件. 实际上,这时按照 Frobenius 定理得知,对 Pfaff 方程組

$$\omega_1=\bar{\omega}_1,\quad \omega_2=\bar{\omega}_2,\quad \omega_{12}=\bar{\omega}_{12} \tag{4·52}$$

应用关系式

$$\left.\begin{aligned}\omega_1'&=[\omega_2\omega_{21}],\\ \omega_2'&=[\omega_1\omega_{12}],\\ \omega_{12}'&=-K[\omega_1\omega_2];\end{aligned}\right\}\qquad \left.\begin{aligned}\bar{\omega}_1'&=[\bar{\omega}_2\bar{\omega}_{21}],\\ \bar{\omega}_2'&=[\bar{\omega}_1\bar{\omega}_{12}],\\ \bar{\omega}_{12}'&=-K[\bar{\omega}_1\bar{\omega}_2],\end{aligned}\right\}$$

便明了(4·52)是完全可积分的. (4·52)是 S 的参数 u, v 和参数 θ (繞法綫的回轉角) 以及 $\bar{S}$ 的类似参数 $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{\theta}$ 等六个变数作成的数空間 E_6 的三个 Pfaff 方程組. 所以它的解变为

$$u=f(\xi_i,c_i),\quad v=g(\xi_i,c_i),\quad \theta=h(\xi_i,c_i), \tag{4·53}$$

$$\bar{u}=\bar{f}(\xi_i,c_i),\quad \bar{v}=\bar{g}(\xi_i,c_i),\quad \bar{\theta}=\bar{h}(\xi_i,c_i), \tag{4·54}$$

式中 ξ_1, ξ_2, ξ_3 表示每一个积分曲面的参数, c_1, c_2, c_3 是賴以区别

积分曲面的参数. 在这里, 通过 E_6 的任意点可引这积分曲面, 所以六个函数 $f, g, h, \bar{f}, \bar{g}, \bar{h}$ 是互相独立的函数, 从而 f, g, h 当然互相間是独立的. 因此, 在(4·53)把六个参数 ξ_i, c_i 中的适当的三个解出, 使每个成为其余三个参数和 u, v, θ 的函数. 因为无論对哪三个討論方法总是一样的, 假定 ξ_1, ξ_2, ξ_3 是作为 c_1, c_2, c_3 和 u, v, θ 的函数表达的. 就是假定

$$\xi_i=\phi_i(c_1, c_2, c_3, u, v, \theta).$$

把这式代入(4·54)式里, 便得到

$$\left.\begin{aligned}\bar{u}&=F(u, v, \theta, c_1, c_2, c_3),\\ \bar{v}&=G(u, v, \theta, c_1, c_2, c_3),\\ \bar{\theta}&=H(u, v, \theta, c_1, c_2, c_3).\end{aligned}\right\} \tag{4·55}$$

如果对于 S 上任意点 (u_0, v_0) 的任何方向 θ_0 給定对应的 $\bar{S}$ 上的任意点 $(\bar{u}_0, \bar{v}_0)$ 和方向 $\bar{\theta}_0$, 那末可以决定一組常数 c_1, c_2, c_3 使这些互相对应. 这样固定了 c_1, c_2, c_3 之后, 注意到

$$\omega_1=a_1(u, v, \theta)du+b_1(u, v, \theta)dv,$$

$$\bar{\omega}_1=\bar{a}_1(\bar{u}, \bar{v}, \bar{\theta})d\bar{u}+\bar{b}_1(\bar{u}, \bar{v}, \bar{\theta})d\bar{v},$$

而从(4·55)代入关系式 $\omega_1=\bar{\omega}_1$, 便看出

$$\bar{a}_1F_\theta+\bar{b}_1G_\theta=0.$$

同样, 置

$$\bar{\omega}_2=\bar{a}_2\,d\bar{u}+\bar{b}_2\,d\bar{v},$$

又获得

$$\bar{a}_2F_\theta+\bar{b}_2G_\theta=0.$$

可是 $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2$ 是独立的, 即

$$\begin{vmatrix}\bar{a}_1 & \bar{b}_1\\ \bar{a}_2 & \bar{b}_2\end{vmatrix}\neq 0,$$

所以 $F_\theta=0$, $G_\theta=0$, 就是 F, G 都不含有 θ, 因而看出

$$\left.\begin{aligned}\bar{u}&=F(u, v, c_1, c_2, c_3),\\ \bar{v}&=G(u, v, c_1, c_2, c_3);\end{aligned}\right\} \tag{4·56}$$

$$\bar{\theta}=H(u, v, \theta, c_1, c_2, c_3).\tag{4·57}$$

假如按照(4·56)給定的关系来建立 $S, \bar{S}$ 間的点对应，那末用(4·57)作出标形的对应之后，可以使(4·52)式成立. 这表明了，可以有三个参变数的自由度使曲面 S 等长对应于 $\bar{S}$ 上. 因此，成立

定理 Gauss 曲率 K 是相等的常数的两曲面可以有三个参变数的自由度互相等长对应于其他.

特别是，Gauss 曲率一定的曲面(称为**常曲率曲面**)可以有三个自由度等长映象到它本身上. 这个事实如后文所述，同非欧几里得几何有密切的关系.

2° K 不是常数的情况.

假設两曲面 $S, \bar{S}$ 互相等长对应，而且在对应点已选好标形使成立

$$\omega_1=\bar{\omega}_1, \quad \omega_2=\bar{\omega}_2, \quad \omega_{12}=\bar{\omega}_{12}.\tag{4·58}$$

已經看到了在 $S, \bar{S}$ 的对应点 K 与 $\bar{K}$ 的值恒是相等. 原来，可以写下

$$\left.\begin{aligned} dK&=K_1\omega_1+K_2\omega_2,\\ dK&=\bar{K}_1\bar{\omega}_1+\bar{K}_2\bar{\omega}_2.\end{aligned}\right\}\tag{4·59}$$

如果注意到在 $S, \bar{S}$ 的对应点 $K=\bar{K}$ 以及存在关系(4·58)等事实，便获得

$$(K_1-\bar{K}_1)\omega_1+(K_2-\bar{K}_2)\omega_2=0,$$

从而

$$K_1=\bar{K}_1, \quad K_2=\bar{K}_2.$$

因为 K 不是常数，在曲面 S 上这样选取新的一阶标形，使在其各点通过它的曲綫 $K=\text{const.}$ 的切綫方向变成新标形的向量 $\mathbf{e}_2^*$. 这样一来，发生了从标形 $(\mathbf{M}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)$ 到新标形 $(\mathbf{M}\mathbf{e}_1^*\mathbf{e}_2^*\mathbf{e}_3^*)$ 的变换如下：

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{e}_1^* &= \mathbf{e}_1\cos\phi - \mathbf{e}_2\sin\phi,\\ \mathbf{e}_2^* &= \mathbf{e}_1\sin\phi + \mathbf{e}_2\cos\phi,\\ \mathbf{e}_3^* &= \mathbf{e}_3.\end{aligned}\right\} \tag{4·60}$$

并且容易明了,从 ω_1, ω_2, ω_{12} 到新的相对支量的变换决定于

$$\left.\begin{aligned}\omega_1^* &= \omega_1\cos\phi - \omega_2\sin\phi,\\ \omega_2^* &= \omega_1\sin\phi + \omega_2\cos\phi,\\ \omega_{12}^* &= \omega_{12} - d\phi.\end{aligned}\right\} \tag{4·61}$$

$\mathbf{e}_2^*$ 是向曲綫 $K=\text{const.}$引的切綫这个事实意味着 $K=\text{const.}$即 $dK=0$ 这个曲綫族与 $\omega_1^*=0$ 即曲綫族 $\omega_1\cos\phi=\omega_2\sin\phi$ 重合一致. 这样选定了 ϕ 之后,很明显地

$$dK=K_1^*\omega_1^* \quad (K_2^*=0),$$

式中 K_1^*, K_2^* 是用 ω_1^*, ω_2^* 按照 $(4·59)_1$ 的类似式定义起来的函数.

現在对 $\bar{S}$ 的标形 $\overline{\mathbf{M}}\bar{\mathbf{e}}_1\bar{\mathbf{e}}_2\bar{\mathbf{e}}_3$ 也同对 S 的一样,用同一 ϕ 而运用 (4·60) 型的变换;从 $\bar{\omega}$ 到 $\bar{\omega}^*$ 的变换式是在 (4·61) 中分别用 $\bar{\omega}$, $\bar{\omega}^*$ 調換 ω, ω^* 而得来的. 所以从 (4·58) 成立

$$\omega_1^*=\bar{\omega}_1^*, \quad \omega_2^*=\bar{\omega}_2^*, \quad \omega_{12}^*=\bar{\omega}_{12}^*.$$

另外,在 S, $\bar{S}$ 的对应点 K 和 $\bar{K}$ 恒相等,

$$d\bar{K}=dK=K_1^*\omega_1^*=K_1^*\bar{\omega}_1^*,$$

从而对于 $\bar{S}$ 的新标形 $(\overline{\mathbf{M}}\bar{\mathbf{e}}_1^*\bar{\mathbf{e}}_2^*\bar{\mathbf{e}}_3^*)$ 也成立

$$d\bar{K}=\bar{K}_1^*\bar{\omega}_1^* \quad (\bar{K}_2^*=0).$$

就是說, $\bar{\mathbf{e}}_2^*$ 是曲綫 $\bar{K}=\text{const.}$在 $\bar{M}$ 的切綫.

因此,方便上略去*符而仍沿用原記号,便看出: 在 S, $\bar{S}$ 上分别地可以选取一阶标形,使下列关系式成立:

$$\left.\begin{aligned}&\omega_1=\bar{\omega}_1, \quad \omega_2=\bar{\omega}_2, \quad \omega_{12}=\bar{\omega}_{12},\\ &dK=K_1\omega_1, \quad d\bar{K}=\bar{K}_1\bar{\omega}_1.\end{aligned}\right\} \tag{4·62}$$

在这样的标形选定下,在 S, $\bar{S}$ 的对应点不仅成立

$$K=\overline{K},$$

而且很明显地还有关系

$$K_1=\overline{K}_1,\quad K_2=\overline{K}_2=0.$$

a) K, K_1 是 u, v 的独立函数的情况. 这时,关于使关系式(4·62)成立的标形写下

$$dK_1=K_{1,1}\omega_1+K_{1,2}\omega_2,$$

其中系数 $K_{1,1}$, $K_{1,2}$ 可以看做 K, K_1 的函数. 就是

$$K_{1,1}=f_1(K,\ K_1),\quad K_{1,2}=f_2(K,\ K_1). \tag{4·63}$$

可是对于 $\overline{S}$ 也成立

$$d\overline{K}_1=\overline{K}_{1,1}\overline{\omega}_1+\overline{K}_{1,2}\overline{\omega}_2,$$

而且在 S 和 $\overline{S}$ 的对应点 $K=\overline{K}$, $K_1=\overline{K}_1$, 所以从(4·62)得知

$$K_{1,1}=\overline{K}_{1,1},\quad K_{1,2}=\overline{K}_{1,2}.$$

因此,在 $\overline{S}$ 上也成立

$$\overline{K}_{1,1}=f_1(\overline{K},\ \overline{K}_1),\quad \overline{K}_{1,2}=f_2(\overline{K},\ \overline{K}_1), \tag{4·64}$$

而且(4·63)式中的 f_1, f_2 和(4·64)式中的 f_1, f_2 是同一函数.

反过来,我們在两曲面 S, $\overline{S}$ 上选取标形使

$$K_2=0,\quad \overline{K}_2=0 \tag{4·65}$$

成立. 这时,如果 K, K_1 是互为独立的函数,那末按照两式

$$K=\overline{K},\quad K_1=\overline{K}_1 \tag{4·66}$$

来确定两曲面上的点对应. 假如在(4·63), (4·64)中的 f_1, f_2 表示同一函数,我們将証明这对应是 S 与 $\overline{S}$ 的等长映象.

根据假定成立 $K=\overline{K}$, 所以

$$dK=d\overline{K}.$$

又因为(4·65)成立,

$$dK=K_1\omega_1,\quad d\overline{K}=\overline{K}_1\overline{\omega}_1,$$

并且从 $K_1=\overline{K}_1$ 得出

$$\omega_1=\overline{\omega}_1. \tag{4·67}$$

其次,由于

$$dK_1=d\overline{K}_1,$$

$$K_{1,1}\omega_1+K_{1,2}\omega_2=\overline{K}_{1,1}\overline{\omega}_1+\overline{K}_{1,2}\overline{\omega}_2.$$

因此,从 (4·63), (4·64), (4·66), (4·67) 看出

$$\omega_2=\overline{\omega}_2. \tag{4·68}$$

(4·67) 和 (4·68) 表明了所論的点对应是两曲面的等长映象.

b) K_1 是 K 的函数的情况. 設 $K_1=f(K)$. 这时,从 $(4·62)_4$ 得出

$$\omega_1=\frac{dK}{f(K)},$$

从而 ω_1 是全微分. 所以

$$\omega_1'=0.$$

由此可見,

$$[\omega_2\omega_{21}]=0$$

而且如結构方程 (3·104) 所示,成立关系式

$$\omega_{12}=\rho_2\omega_2. \tag{4·69}$$

b₁) ρ_2 同 K 是独立的函数的情况. 这时,

$$d\rho_2=\rho_{2,1}\omega_1+\rho_{2,2}\omega_2$$

的系数 $\rho_{2,1}$, $\rho_{2,2}$ 作为 K, ρ_2 的函数可以写成

$$\rho_{2,1}=g_1(K,\rho_2),\quad \rho_{2,2}=g_2(K,\rho_2). \tag{4·70}$$

当两曲面 S, $\overline{S}$ 是等长时,选定这样的标形,使 (4·62) 在对应点成立. 这样,在对应点 $K=\overline{K}$; 如果 $K_1=f(K)$, 那末 $\overline{K}_1=f(K)$. 因此,

$$\overline{\omega}_{12}=\overline{\rho}_2\overline{\omega}_2$$

也成立,而且在对应点还成立

$$\rho_2=\overline{\rho}_2. \tag{4·71}$$

另外,关于 $\overline{\rho}_2$ 同 (4·70) 一样地可以写成

$$\bar{\rho}_{2,1}=g_1(\bar{K},\bar{\rho}_2),\quad \bar{\rho}_{2,2}=g_2(\bar{K},\bar{\rho}_2),\tag{4·72}$$

在(4·70)，(4·72)两式中的 g_1, g_2 分别表示同一函数.

反过来,我們选取两曲面 S, $\bar{S}$ 上的标形,使成立

$$K_2=0,\quad \bar{K}_2=0.\tag{4·73}$$

这时如果

$$K_1=f(K),\quad \bar{K}_1=f(\bar{K})\tag{4·74}$$

并且 K, ρ_2 是独立函数,按照两式

$$K=\bar{K},\quad \rho_2=\bar{\rho}_2\tag{4·75}$$

确定两曲面上的一对一的对应.

假如用同一組函数 g_1, g_2 能使(4·70)，(4·72)成立的話，我們将証明这对应是两曲面的等长映象.

根据假定，$dK=d\bar{K}$，而且(4·73)成立,所以

$$K_1\omega_1=\bar{K}_1\bar{\omega}_1.$$

按照 (4·73)，(4·74) 便导出

$$\omega_1=\bar{\omega}_1.\tag{4·76}$$

其次,从 $d\rho_2=d\bar{\rho}_2$ 得到

$$\rho_{2,1}\omega_1+\rho_{2,2}\omega_2=\bar{\rho}_{2,1}\bar{\omega}_1+\bar{\rho}_{2,2}\bar{\omega}_2.$$

从 (4·70)，(4·72)，(4·75)，(4·76) 易知

$$\omega_2=\bar{\omega}_2.\tag{4·77}$$

(4·76) 和 (4·77) 表明了 S, $\bar{S}$ 是按照 (4·75) 等长对应的.

b₂) ρ_2 是 K 的函数的情况. 对于曲面 S,

$$\left.\begin{array}{l} K_1=f(K),\quad K_2=0;\\ \omega_1=\dfrac{dK}{f(K)},\ \omega_{12}=\rho_2\omega_2,\ \rho_2=g(K) \end{array}\right\}\tag{4·78}$$

成立. 如果 S 和 $\bar{S}$ 是等长的,在对应点

$$K=\bar{K},$$

并且很明显地,用同一組函数 f, g 可以表出

$$\left.\begin{aligned}&\overline{K}_1=f(\overline{K}),\quad \overline{K}_2=0;\\&\overline{\omega}_1=\frac{d\overline{K}}{f(\overline{K})},\ \overline{\omega}_{12}=\overline{\rho}_2\overline{\omega}_2,\ \overline{\rho}_2=g(\overline{K}).\end{aligned}\right\}\tag{4·79}$$

我們在下文中将闡明具有同一組函数 f, g 的这类两曲面是以依賴单参数的自由度互相等长对应的.

为此,假定按照两关系式

$$K=\overline{K},\quad \omega_2=\overline{\omega}_2\tag{4·80}$$

来确定 S, $\bar{S}$ 間的点对应. 首先使在 S 上的曲綫 $K=c\,(c=\text{const.})$ 和在 $\bar{S}$ 上具有同一常数 c 的曲綫 $\overline{K}=c$ 互相对应起来. 至于这些曲綫上的哪一点和哪一点对应的問題,要从第二条件 $\omega_2=\overline{\omega}_2$ 来确定.

可是在两曲面上恒有 $K=\overline{K}$, 所以

$$dK=d\overline{K},$$

$$\therefore\quad f(K)\omega_1=f(\overline{K})\overline{\omega}_1.$$

如果 $K=\overline{K}$, 那末 $f(K)=f(\overline{K})$, 从而成立

$$\omega_1=\overline{\omega}_1.\tag{4·81}$$

在曲面 S 上取 K 和另一独立函数为新参数, 以代替 u, v, 而重新改写为 K, v. 在曲面 $\bar{S}$ 上同样地取形如 $\overline{K}$, $\bar{v}$ 的参数. 然后考察 Pfaff 形式

$$\omega_2=\overline{\omega}_2.\tag{4·82}$$

由于我們是在 $K=\overline{K}$ 的条件下进行討論的, 不妨把这 Pfaff 形式看做 K, v, $\bar{v}$ 等三个变数的 Pfaff 形式.

可是外导微它的两边,

$$[\omega_1\omega_{12}]=[\overline{\omega}_1\overline{\omega}_{12}],$$

并从(4·78), (4·79), (4·81)代入这里,

$$g(K)[\omega_1(\omega_2-\overline{\omega}_2)]=0,$$

所以这式确实是根据(4·82)成立的. 这表明了(4·82)是完全可积

分的. 因此, 在以$(K, v, \bar{v})$为坐标的三維空間里通过任何一点必有二維的积分流形,而这流形是由形如

$$K=\lambda(\xi, \eta, c), \quad v=\mu(\xi, \eta, c), \quad \bar{v}=\nu(\xi, \eta, c)$$

的方程表达起来的. $K, v, \bar{v}$ 是独立地变动的,所以 λ, μ, ν 也是独立函数. 因此,从前两个可以解出 ξ, η, c 中的适当的两个,并且把这两个代入第三式里,便得到

$$\bar{v}=F(v, K, a).$$

这里 a 表示 ξ, η, c 中的一个,而是作为(4·82)的积分常数遺留下来的.

$$\bar{K}=K, \quad \bar{v}=F(v, K, a) \tag{4·83}$$

給出曲面 S 与 $\bar{S}$ 的等长映象. 这是因为,这时 (4·81), (4·82) 都成立了的緣故.

映象(4·83)包含任意常数 a 在内,所以从 S 到 $\bar{S}$ 就有了等长映象的連續族.

【习题】

1. 証明曲面

$$x_1=a(\cos u+\cos v), \quad x_2=a(\sin u+\sin v), \quad z=c(u+v)$$

可以展开到回轉面上.

2. 曲面

$$x_1=au, \quad x_2=bv, \quad 2x_3=au^2+bv^2$$

和曲面

$$x_1=a'u, \quad x_2=b'v, \quad 2x_3=a'u^2+b'v^2$$

当 $ab=a'b'$ 时,証明它們具有同一的 Gauss 曲率,而不是互为等长的.

4·6 常曲率曲面与非欧几里得几何学(一)

我們在前面曾經証过 Gauss 曲率 0 的曲面是可展面. 因而,在这样的曲面和平面的某領域之間可以确定等长的对应. 可是在平面上有被称为合同变换的依賴三个参数的等长变换,平面上的

任意領域 D 是以三参数的自由度同它本身做成等长对应而变动的。

在另一方面，如 4·5 中所述，只要 Gauss 曲率 K 是常数，这曲面的适当小領域 D 是以三参数的自由度同它本身做成等长对应而变动的。因此，这个領域 D 的图形可以說成在曲面上的几何学的意义下同它合同而以三参数的自由度的变动是可能的。此外，特别地值得注意的是，这曲面上的任意点 P 移到其他任意点 Q，而且通过 P 的任意方向对应于通过 Q 的任意方向的这种等长对应，可以在 P 的邻域与 Q 的邻域之間确定起来。这表明了，当我們把所論曲面本身看做二維空間时，这空間的各点都是同权而且在各点的无論哪一个方向也都是同权的；换言之：这表明了这空間的**齐次性**。如在右图中所示，在把球面凹进去的曲面上凹进的地点的 $K<0$，而不凹进的地点的 $K>0$，所以不能使这些部分做成等长的对应，换言之：当把这样的曲面看做具有从三維空間自然地誘导于其上的 ds^2 的二維空間时，它并不具备齐次性。

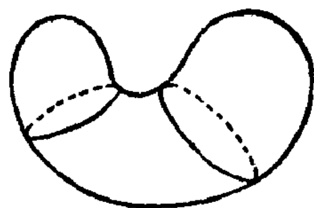


图 4·16

Gauss 曲率是常数的这种曲面在上述意义下具备齐次性这一事实是非常值得注意的。为有这个性质，这种曲面有关的曲面上的几何同欧几里得平面几何有显著类似之处。

非欧几里得几何有两种：一种是在平面上給定一条直綫 l 和直綫外的一点 A 的时候，通过 A 而与 l 不相交的直綫連一条都不能引的性质成立的几何，即所謂**椭圓的非欧几里得几何**；另一种是在同一假定下，通过 A 而与 l 不相交的直綫可引无穷多条的性质成立的几何，即所謂**双曲的非欧几里得几何**。$K=$常数>0 的曲面上的几何和 $K=$常数<0 的曲面上的几何各各与椭圓的非欧几里得几何和双曲的非欧几里得几何有密切关系，以下将說明这个

事实.

首先，在 $K=\frac{1}{a^2}$ (a 实常数) 的正常曲率曲面之中如果要考察最简图形，那应該是半徑 a 的球面了. 从4·2明确了，在球面上大圓是測地綫. 如果把球面上的大圓比作平面上的直綫，由三条大圓弧圍成的三角形比作平面上的三角形，如在球面三角法所学到的，我們得到平面几何的一些类似定理. 球面上的等长变换是以球心 O 为中心的回轉.

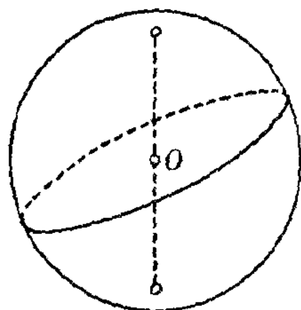


图 4·17

两个大圓相交于两点，这两点是球面上在同一直徑的两端. 方便上，称这两点为**直徑对点**. 为了把大圓比作直綫的观念搞得更徹底些，我們要采用稍为抽象的討論方法，而把互为直徑对点的两点看成同一点. 如果这样想有困难，就把这个球面沿赤道面切开两半，并且仅仅取北半球作为全空間，来討論这样的二維空間 Σ (但是在赤道上必須把直徑对点看做同一点).

当两曲綫、两曲面、两空間等之間确定一对一的連續对应时，这些称为**同胚**. 上述的二維空間是称为射影几何的且与平面同胚的. 实际上，如果用解析方法討論平面射影几何，同时不为0的三个实数之比 $x_1:x_2:x_3$ 表示平面上的一点. 在另一方面，选取三維欧几里得空間的直交軸并考察通过原点的直綫，其上一点的三个坐标的比値是一定的，所以看出：只要把这样的直綫看做一点，就可使这样的直綫集与所謂射影几何的平面的点做成一对一的連續对应. 把通过原点的直綫用中心在原点而半徑是 a 的球面来截断，便可明了球面上的直徑对点偶与射影平面的点做成一对一的連續对应. 与其說，把赤道上的直徑对点看做同一点，倒不如假定北半球的面是由薄紙做成的，把赤道上的对应点用浆糊粘貼一起

而造出一个曲面来得方便. 这个曲面确实是与射影平面同胚的,但是不幸的是,在三維欧几里得空間里要使这曲面和它本身不相交错,那是无法实現的. 在四維欧几里得空間倒可作出自己不相交错的且与射影平面又是同胚的曲面. 但是,在这里可不能涉及它.

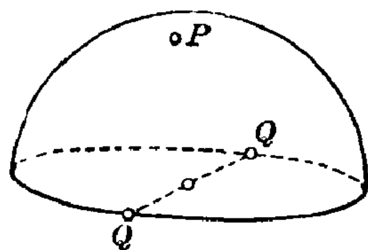


图 4·18

上述的北半球面赤道上的点,看来好象和曲面上的其他点不是同权似的,但是其实不是如此. 在赤道面切开球面原系方便上的操作,如果想討論赤道上的点 Q 的邻域,用与通过 Q 的半徑垂直的平面来切开球面,而进行討論就行了. 如果使用拓扑学的术語来表达,那就是說,这个曲面的两叶复迭面(参照下一节)构成着球面.

曲面 Σ 上的几何是局部地和球面几何相同的. 与球面几何的显著差别在于两条測地綫不在两点相交的地方. 容易明了,两条測地綫必須相交于一点,所以在"不相交的两直綫称为平行綫"的意义下的平行綫是不存在的. 曲面 Σ 上的几何不外乎是被称为椭圓的非欧几里得几何.

在上述的几何里測地綫都是閉曲綫. 象这样,相当于直綫的变成閉曲綫,又全空間的面积竟变成有限的 $2\pi a^2$,讀者們一定会难于承认这是我們居住的空間的二維的类似,从而对它和欧几里得几何說成是具有同权的想法一定会感到不愉快. 可是比如把 a 取为很大数例如一亿光年(光年是光綫一年間所进行的距离),这样試一試怎么样呢? 我們在这时观測中能不能把空間 Σ 与普通平面加以区別呢?

$K=$常数>0 的曲面除球面外还有不少. 如果剪下半徑 a 的球面的一部分,把它当作薄紙做的小片而加以无伸縮地变形,那末这些都是 $K=\dfrac{1}{a^2}$ 的曲面.

在 Gauss 曲率 $K=-\frac{1}{a^2}$ (a 常数) 的負常曲率曲面中最簡单的是被称为伪球的曲面．首先对这曲面加以說明．在平面上选取直交軸 (x, y)，設从曲綫 C 上的每一点 P 所引 C 的切綫与 y 軸相交于点 Q，而且設綫段 PQ 的长等于定值 a 的曲綫 C 决定于方程

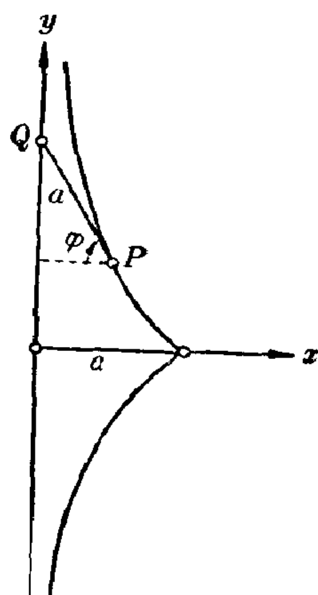


图　4·19

$$y=f(x).$$

因为切綫的方程是

$$Y-y=y'(X-x),$$

PQ 的长的平方等于 $x^2(1+y'^2)$，从而

$$y'^2=\frac{a^2}{x^2}-1.$$

因此，所求的曲綫 C 是作为这个微分方程的解而得出的．这微分方程是容易求解的；当所求的曲綫在 y 軸的右半平面上时，設 $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$，曲綫 C 决定于参数表示

$$\left.\begin{aligned} x&=a\cos\varphi, \\ y&=a\log\tan\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-a\sin\varphi, \end{aligned}\right\} \tag{4·84}$$

或者把这曲綫和 y 軸平行推移之后所得来的．在 y 軸的左半平面上而且具有同样性质的曲綫的方程，只須在 (4·84) 里以 $x=-a\cos\varphi$ 来代替第一式就可导出．

讀者們可能在微积分中繪描曲綫的章节里学过上述的曲綫，这叫做**曳地綫**，有人叫它**犬綫**．其理由是这样：有人牵着一条狗出去散步，带长是 a；当他在 y 軸上一直綫地步行时，狗是被他所牵拉而勉强跟随前进的，这时狗所走的綫路就是曳地綫．这曲綫关于 x 軸是对称的，$(a, 0)$ 点是其尖点，x 軸是尖点切綫而且 y 軸是漸近綫．

关于这曲綫还有一个値得注意的事項，那就是这曲綫的定义同圓的定义有类似之处．圓是从定点(中心)有一定距离(半徑)的点的軌迹，而現在代替定点的有定直綫(y 軸)，代替半徑的有一定的切綫段 PQ．在这意义下，应該相应地称这曲綫为伪圓(a 是伪半徑)．半徑 a 的圓的面积是 πa^2，而上述的曳地綫与其漸近綫之間所夹着的部分的面积等于 $\frac{\pi a^2}{2}$，这个事实也可以說是类似．在这里把圓所在的平面繞其一直徑的周圍回轉，这圓画成一个球面，而当曳地綫的平面繞其漸近綫的周圍回轉时，曳地綫画成一个曲面，称为**伪球**．同伪圓一样，伪球是和从中心有定距离的点的軌迹卽球面类似的，而且相当于球心的是曳地綫的公共漸近綫．伪半徑 a 的伪球的表面积等于 $4\pi a^2$，卽球面的表面积，而且伪球的体积等于 $\frac{2\pi a^3}{3}$，卽球体积的一半，这些結果都可以算在类似之列．

但是，最重要的类似是下述的事实：球面是正常曲率曲面，而且当把它看做二維空間并从三維欧几里得空間給以自然地誘导进来的尺度时，所产生的曲面上的几何(球面几何)同椭圓的非欧几里得几何有密切关系；同这事实一样，伪球面是負常曲率曲面，而且这曲面上的几何同双曲的非欧几里得几何有密切关系．

伪半徑 a 的伪球 是伪半径 a 的曳地线(伪圆)(4·84)的回轉面，所以其上的点是用通过它的子午綫同 x_1x_3 平面的交角 v，以及这子午綫在所論的点引的切綫同 x_1x_2 平面的交角 φ 来表达的，卽

$$x_1=a\cos\varphi\cos v,\quad x_2=a\cos\varphi\sin v,$$

$$x_3=a\log\tan\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-a\sin\varphi.$$

容易驗証，在这样参数表示下的伪球的綫素是

$$ds^2=a^2(\tan^2\varphi d\varphi^2+\cos^2\varphi\, dv^2).$$

我們在下文中仅考察伪球的上半边卽 $x_3\geqslant 0$ 的部分，并且为

代替参数(φ, v)而按照

$$\xi = av, \quad \eta = \frac{a}{\cos\varphi} \tag{4·85}$$

导入新参数ξ, η. 从几何看来,很明显地v曲綫、φ曲綫分别是平行环和子午綫,而且ξ曲綫、η曲綫分别也是平行环和子午綫. 所以参数曲綫整个是不动的, 只是对于各参数曲綫的参数值有所不同而已. 所論的伪球的綫素是在新参数(ξ, η)的表示下变为

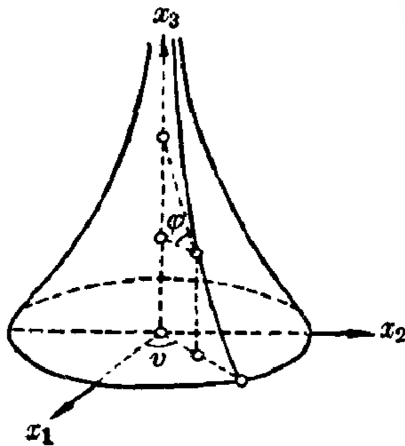


图 4·20

$$ds^2 = \frac{a^2(d\xi^2 + d\eta^2)}{\eta^2}, \tag{4·86}$$

为这式的导出只要应用(4·85)来演算就够了. 伪球的上半边对应于

$$-a\pi \leqslant \xi \leqslant a\pi, \quad \eta \geqslant a$$

的部分.

从上面的綫素式看出,可以选取一阶标形使得

$$\omega_1 = \frac{a\,d\xi}{\eta}, \quad \omega_2 = \frac{a\,d\eta}{\eta}. \tag{4·87}$$

置

$$\omega_{12} = A\,d\xi + B\,d\eta$$

并且把(4·87)代入結构方程

$$\omega_1' = [\omega_2\omega_{21}], \quad \omega_2' = [\omega_1\omega_{12}],$$

便容易得到

$$\omega_{12} = \frac{d\xi}{\eta}. \tag{4·88}$$

又把(4·87)和(4·88)代入

$$\omega_{12}' = -K[\omega_1\omega_2],$$

我們获得

$$K=-\frac{1}{a^2}.$$

所以伪球是負常曲率曲面.

此外,还有許多負常曲率曲面. 截下伪球的一片而加以弯曲,得到的曲面都是負常曲率的. 接下去将另立一节来說明伪球上的几何与非欧几里得几何之間的关系.

4·7 常曲率曲面与非欧几里得几何学(二)

在一平面上考察直交坐标系 (x, y), 而且按照

$$x=\xi, \quad y=\eta \tag{4·89}$$

作出伪球上的点 (ξ, η) 与这平面上的点 (x, y) 之間的对应. 这样一来, 伪球上的点被映象到平面上由二直綫 $x=-a\pi$, $x=+a\pi$ 圍成的带 $y\geqslant a$ 的部分去. 在这映象下,伪球的上半部分和 (x, y) 平面的带 $y\geqslant a$ 的点一般地构成一对一的連續对应, 只是这条带的两側平行綫 $x=-a\pi$ 和 $x=+a\pi$ 在伪球上对应于同一条子午

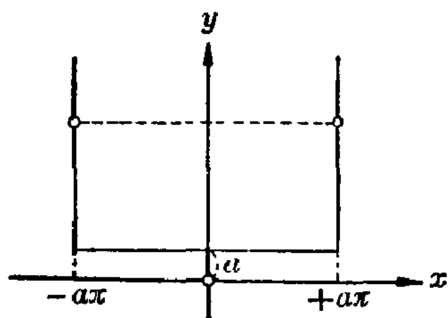


图 4·21

綫,所以在这些直綫上具有同一 y 坐标的点应該是伪球上的同一点的象. 为进一步明确这个情况,考察半徑 a 的直圓柱,并且在其一条母綫上涂上墨汁,而把直圓柱沿这条母綫横摆在平面上. 然后把直圓柱滚动一周,便得到幅長 $2a\pi$ 的一条带;把前述的一条带

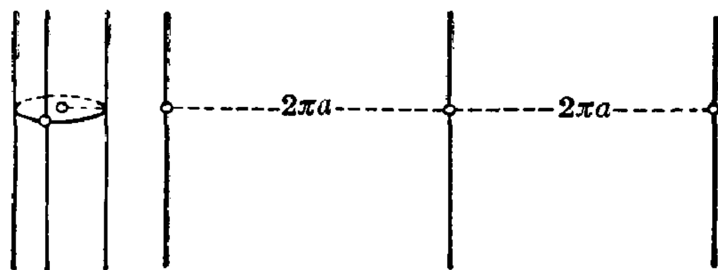


图 4·22

比作这条带来看，就容易明了所述的情况．这条带的两側平行綫上的同一公共垂綫的两垂足对应于直圓柱的同一点，从而把所論的平面看成是薄紙做的，沿这平行綫剪裁下来，并粘貼起来使两緣的对应点重合，便产生原来的直圓柱的包筒．

可是，如果把直圓柱在平面滚动两周，便产生幅长 $4\pi a$ 的一条带．如上所述，用剪刀截断两緣并卷在直圓柱上，恰恰可卷两圈．这时，重合于圓柱上的同一点的点在带上一般有两个，只有重合于上墨汁的母綫上的点的有三个．象这样同直圓柱上的点选定了对应的各点所在的幅长 $4\pi a$ 的带，称为直圓柱的**两叶复迭面**．最初所述的幅长 $2\pi a$ 的带可以看成一叶复迭面．同样，也可考察 m 叶复迭面($m\geqslant 3$)．全平面是单連通的，而且是直圓柱的无穷叶复迭面．有时称单連通的复迭面为**通用复迭面**．

映象伪球的上半边到 xy 平面上由二直綫 $x=-a\pi$ 和 $x=+a\pi$ 所圍成的带 $y\geqslant a$ 的部分去，这映象虽然不是伪球在平面上直接滚动出来的，但是它同直圓柱在平面上回轉一周的情况相类似．这是因为带的两側以外的点与伪球上除子午綫 $v=\pi$ 以外的部分做成一对一的連續对应，而只有这子午綫上的点与带的两側的各一点相对应的緣故．同在平面上滚动直圓柱的情况一样，在这条带的两側再作各各間隔 $2\pi a$ 的类似的带，便可把这些看为伪球上半边的两叶、三叶等等的复迭面．$y\geqslant a$ 的半平面是伪球上半边的无穷叶的通用复迭面．

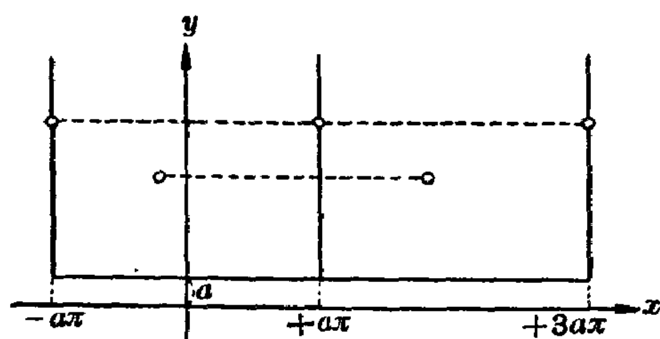


图　4·23

在直圓柱上或在伪球上有卷繞着的曲綫．为了要鉆研这种曲綫的性质，不要在原有的情况討論它，而是如上所述，把直圓柱或

伪球在平面滚动，并且把看做一条綫的那一条曲綫陆續展开到平面上，来钻研这象的曲綫的性质；从此导出原曲綫的性质，比前面的方法要方便一些．复迭面是用于这样目的的．只要钻研象曲綫如何截穿那些以 $2\pi a$ 的間隔画成的平行綫的情况，就可看出問題的曲綫怎样卷繞着原曲面的情况了．

如果在(4·89)式里对 ξ 不加上 $-2\pi a\leqslant\xi\leqslant 2\pi a$ 的限制，而是使 ξ 自由在 $-\infty<\xi<+\infty$ 里变动，我們早已明了 xy 平面上的对应領域 $y\geqslant a$ 是伪球上半边的通用复迭面．可是伪球到平面上的这个对应是共形的．这就是，伪球上的两曲綫的交角与平面上的两对应曲綫的交角恒是相等的．这个事实从下面所述可以看出：在伪球上綫素决定于(4·86)，同 $d\xi^2+d\eta^2$ 成比例，且从而在映象(4·89)之下，它同平面上的綫素 dx^2+dy^2 也成比例．

在这里，同普通长度的量法不同，假定另外导入在平面上的新量法

$$d\sigma^2=\frac{a^2(dx^2+dy^2)}{y^2}. \tag{4·90}$$

这就是假定在平面上对曲綫 $x=x(t)$，$y=y(t)$，$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 选用

$$\int_\alpha^\beta \frac{a\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}{y}\,dt$$

作为它的长(方便上称为**伪弧长**)．又称連結两点 A, B 的曲綫的伪弧长的最大下限为 A, B 的**伪距离**．(4·89)这个映象給出了映伪球到这样具有长度量法的平面上的等长映象．因此，为了檢驗伪球上的測地綫，在平面上如能求出連結其上两点 A, B 的这样曲綫，使得

$$J=\int_\alpha^\beta \frac{a\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}{y}\,dt$$

变为最小，也就是求出这个变分問題的**极值曲綫**($\delta J=0$ 的解的曲綫)，那末作为它的原象就可得到所要檢驗的測地綫．

可是求上述变分問題的极值曲綫的問題在形式上同求綫素决定于

$$ds^2=\frac{a^2(dx^2+dy^2)}{y^2} \tag{4·91}$$

的曲面的測地綫的問題完全一样，所以置

$$\omega_1=\frac{a\,dx}{y}, \quad \omega_2=\frac{a\,dy}{y}$$

并注意到

$$\omega_{12}=\frac{dx}{y},$$

只須討論測地綫的微分方程

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{ds}\left(\frac{\omega_1}{ds}\right)+\frac{\omega_2}{ds}\,\frac{\omega_{21}}{ds}=0,\\ \frac{d}{ds}\left(\frac{\omega_2}{ds}\right)+\frac{\omega_1}{ds}\,\frac{\omega_{12}}{ds}=0\end{aligned}\right\} \tag{4·92}$$

的解的曲綫就够了．在这里用一撇表示关于 s 的导微，$(4·92)_1$ 变为

$$\left(\frac{ax'}{y}\right)'-\frac{ax'y'}{y^2}=0,$$

积分后，得到

$$\log\left(\frac{x'}{y}\right)-\log y=\text{常数},$$

从而

$$x'=\frac{c}{a^2}\,y^2 \quad (c>0).$$

可是 ds 决定于 (4·91)，所以用普通参数 t 来改写最后式为

$$\frac{a\dot{x}}{y\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}=c. \tag{4·93}$$

式中·表示关于 t 的微商．現在，将求这微分方程的解．

(i) $c=0$ 的情况．由于 $\dot{x}\equiv 0$，变为垂直于 x 軸的直綫．

(ii) $\dot{y}\equiv 0$ 的情况。这时 $y=\frac{a}{c}$，就是 x 軸的平行綫也是解的曲綫。

(iii) 除了上列二情况而外，可以消去 t 而改写(4·93)为

$$y\sqrt{1+y'^2}=r \quad \left(r=\frac{a}{c}\ \text{常数}\right). \tag{4·94}$$

为了把这方程积分起来，任意取一条积分曲綫，設其上的一点是 $P(x, y)$，而且在 P 的切綫与 x 軸所成的角是 θ，在 P 的法綫与 x 軸的交点是 N，那末

$$y'=\tan\theta,$$

$$\therefore \quad \sqrt{1+y'^2}=\sec\theta,$$

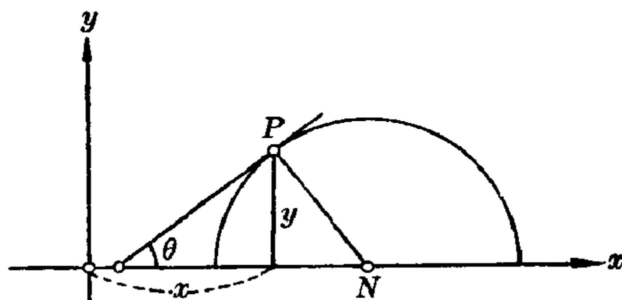


图 4·24

而且

$$PN\cos\theta=y,$$

所以比較此式与(4·94)式的結果，便看出 $PN=r$。此外，点 N 的 x 坐标是

$$X=x+yy'=x\pm\sqrt{r^2-y^2}$$

(两重符号是按照 $y'\gtrless 0$ 而定为 $\pm$ 的)，容易看出这是一个常数。因此，所論的曲綫是以 x 軸上的一点为中心的圓，就是說，它必須是与 x 軸直交的圓。

在上文中我們求得了測地綫微分方程之一卽 $(4·92)_1$ 的解的曲綫。可是

$$\left(\frac{\omega_1}{ds}\right)^2+\left(\frac{\omega_2}{ds}\right)^2=1,$$

所以

$$\frac{\omega_1}{ds}\frac{d}{ds}\left(\frac{\omega_1}{ds}\right)+\frac{\omega_2}{ds}\frac{d}{ds}\left(\frac{\omega_2}{ds}\right)=0,$$

从而也成立

$$\frac{\omega_1}{ds}\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{\omega_1}{ds}\right)+\frac{\omega_2\omega_{21}}{ds^2}\right]+\frac{\omega_2}{ds}\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{\omega_2}{ds}\right)+\frac{\omega_1\omega_{12}}{ds^2}\right]=0.$$

这表示了，如果对于$(4\cdot92)_1$的解 $\omega_2\neq0$，那末这个解也是$(4\cdot92)_2$的解．可是 $\omega_2=0$，从而 $dy=0$ 表示 x 軸的平行綫，而它显然不成为$(4\cdot92)_2$的解．所以看出，微分方程組(4·92)的解的曲綫是直交于 x 軸的圓(包括直綫)．从这和非欧几里得几何的关联，称它为**伪直綫**．

现在，在上半平面 $y\geqslant0$ 考察映它到本身去的这样的等长变换，使在平面上画着的钟的时針回轉方向恒被保持着；我們称这种变换为**伪运动**，并将求出这种变换的全部．当以 Gauss 的复数表示 $z=x+iy$ 来表达平面上的点时，变换

$$z^*=z+\beta \quad (\beta\text{ 实数}), \tag{4·95}$$

$$z^*=\alpha z \quad (\alpha>0\text{ 实数}) \tag{4·96}$$

各各表示向 x 軸方向的平行移动和以原点为中心的相似扩大，而且从 (4·90) 的形状看出，这些都是伪运动．在这里还指出，另一变换

$$z^*=-\frac{1}{z} \tag{4·97}$$

也是伪运动．如图 4.25 所示，这是使一点 $P(z)$ 与它关于单位圓的反演点 P' 的再关于 y 軸的对称点 $P^*(z^*)$ 互相对应的变换．现在，当取点 P 的无穷小邻域的一点 Q 时，

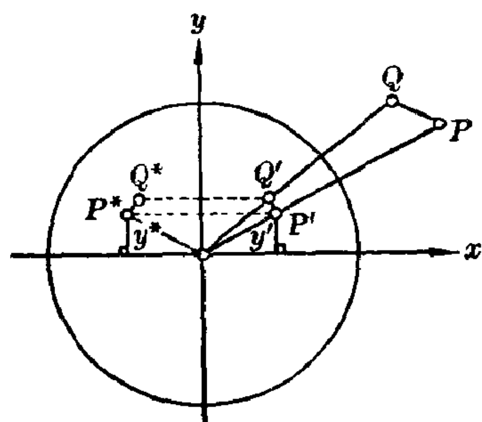


图 4·25

$$\triangle OPQ\backsim\triangle OQ'P',$$

所以

$$\frac{PQ}{OP}=\frac{P'Q'}{OQ'}.$$

可是 OQ' 与 OP' 的差是无穷小量，可用 OP' 代替右边的 OQ'，所

以

$$\frac{PQ}{y}=\frac{P'Q'}{y'}=\frac{P^*Q^*}{y^*},$$

从而导出

$$\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{y}=\frac{\sqrt{dx^{*2}+dy^{*2}}}{y^*}.$$

这就是説，(4·97) 也是伪运动。

設 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 都是实数，形如

$$z^*=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}, \quad \alpha\delta-\beta\gamma>0 \tag{4·98}$$

的变换都是伪运动. 实际上，当 $\gamma=0$ 时，可以置 $\delta=1$，所以它变为形如

$$z^*=\alpha z+\beta, \quad \alpha>0$$

的变换，而这又可分解为

$$z_1=\alpha z, \quad z^*=z_1+\beta,$$

因此，它是伪运动 (4·95) 和 (4·96) 的組合，从而也是伪运动. 其次，当 $\gamma\neq 0$ 时，不妨置 $\gamma=1$. 这样，可以分解变换 (4·98) 为

$$z_1=z+\delta, \quad z_2=-\frac{1}{z_1},$$

$$z_3=(\alpha\delta-\beta)z_2, \quad z^*=z_3+\alpha.$$

所以它是前述的三种特殊伪运动的組合，从而也是伪运动。

如果給 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 以种种的数值，容易驗証 (4·98) 型的变换做成一个群. 从各个变换 (4·95)，(4·96)，(4·97) 的性质明了这个变换群的各个变换是把 x 軸 ($y=0$) 固定不变，把上半平面 $y>0$ 移到它本身，而且把伪直綫变为伪直綫去的.

除了 (4·98) 型的变换而外，再不存在另外的伪运动. 同在欧几里得平面上选定一組的对应点和对应方向时便可唯一地确定合同变换一样，在半平面 $y>0$ 上选定任意一組的对应点和对应方向

时也可唯一地确定伪运动．我們只須闡明在(4·98)中必存在这样的变换．为此，也只要說出在变换集(4·98)之中必有这样的伪运动，使得在 $y>0$ 上的任意点 z_1 和通过它的伪直綫重合到 y 軸上的定点 i 和 y 軸．

首先当通过 z_1 的問題中的伪直綫垂直于 x 軸时，只要适当地把形如 (4·95)，(4·96) 的伪运动組合起来，就能得到所述的要求．在一般情况下如图 4.26 所示，定义 z_0, z_∞ 并考察

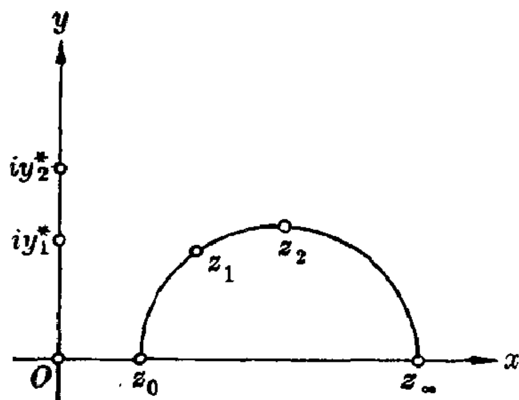


图　4·26

$$z^*=\frac{z-z_0}{(z_0-z_\infty)\ (z-z_\infty)};$$

这也是 (4·98) 型的变换，而把所論伪直綫明显地移到 y 軸，从而只要再适当地运用(4·96)型的变换，便可看出这时候也是可能的．

現在，将求上半平面 $y>0$ 上的两点 z_1, z_2 間的伪距离 $d(z_1, z_2)$ 的几何意义．先假定連結 z_1, z_2 的伪直綫是圓，按照伪运动

$$z^*=\frac{z-z_0}{(z_0-z_\infty)\ (z-z_\infty)} \tag{4·99}$$

把它变换到 y 軸．z_0 和 z_∞ 分別被移到原点和无穷远点去；設点 z_1, z_2 分別被移到点 iy_1^*, iy_2^* (y_1^*, y_2^* 是实数)，那末

$$d(z_1, z_2)=a\int_{y_1^*}^{y_2^*}\frac{dy^*}{y^*}=a\log\frac{y_2^*}{y_1^*}. \tag{4·100}$$

一般地給定四点 z_1, z_2, z_3, z_4 的时候，称

$$(z_1z_2,\ z_3z_4)\equiv\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}:\frac{z_1-z_4}{z_2-z_4}$$

为这四点在这次序下的**交比**．为了四点 z_1, z_2, z_3, z_4 在同一圓周上的充要条件是，交比 $(z_1z_2,\ z_3z_4)$ 变为实数；这个事实从复数的几何表示是容易明了的．

可是对 z_1, z_2, z_3, z_4 同时运用变换 (4·98)，設它們分别被移到 z_1', z_2', z_3', z_4'，那末

$$(z_1z_2,\ z_3z_4) = (z_1'z_2',\ z_3'z_4'),$$

就是説，交比的值是不变的. 如果用关系式

$$z_1' - z_3' = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)(z_1 - z_3)}{(\gamma z_1 + \delta)(\gamma z_3 + \delta)}$$

从而

$$\frac{z_1' - z_3'}{z_2' - z_3'} = \frac{(\gamma z_2 + \delta)(z_1 - z_3)}{(\gamma z_1 + \delta)(z_2 - z_3)},$$

便容易驗証这个事实.

可是(4·99)式是和(4·98)同型的变换. 因此，看出

$$(y_1^*,\ y_2^*,\ 0,\ \infty) = \frac{y_1^*}{y_2^*} = (z_1z_2,\ z_0z_\infty).$$

这样一来，我們終于給出了对两点 z_1, z_2 間的伪距离的几何意义：

$$d(z_1, z_2) = |a \log(z_1z_2,\ z_0z_\infty)|. \qquad (4·101)$$

当連結 z_1, z_2 的伪直綫是直綫时，从头就可使用 (4·100) 的形式，所以这时候也是同样的.

連結两点 z_1, z_2 的伪直綫是連結 z_1, z_2 的最短綫. 实际上，設有連結 z_1, z_2 的其他曲綫 (C^1 級)，用变换 (4·99) 把所論的伪直綫移到 y 軸来，而对这样生成的伪綫段与伪弧作比較. 为此，在伪綫段上取无穷小綫段 ST，設从两端所引 x 軸的平行綫与伪弧相交于两点 S_1，T_1，那末以欧几里得尺度来量时，$ST \leqslant S_1T_1$. 可是在 S, S_1 的 y 坐标相同，所以以伪弧长尺度来量时，也成立 $ST \leqslant S_1T_1$，从而积分的結果也是同样的. 因此，这綫

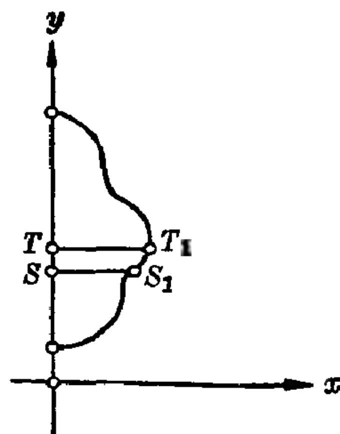


图 4·27

段是連結两端的最短綫. 这样証明了，对于任意的伪直綫它的弧是連結两端点的最短綫.

如上所述，我們在 xy 平面的 x 軸的上半平面里所导进的几何具有显著的特征. 那就是，当在連結两点 z_1，z_2 的伪直綫上移动点 z_2，使趋近于 z_0 或 z_∞ 时，$d(z_1, z_2)\to\infty$. 只要用变换 (4·99) 把所論的伪直綫移到 y 軸来討論，从 (4·100) 就可明确这个事实. 因此，如果把上半平面看做二維空間或二維宇宙，x 軸应該是它的无穷远处，即宇宙的尽处. 伪长相等的伪綫段随着同 x 軸的趋近，从我們的眼睛看来，应該是逐漸地变短了.

当在这二維空間里两曲綫相交时，它們的交角是指两曲綫的普通意义的交角而言.

这样賦予了长度和角度概念的二維空間，称为 **Poincaré 的平面**.

如所周知，欧几里得几何是在公理体系上构成的. 在这公理体系中現在最严密的而最簡洁的要算 Hilbert 的公理体系. 在这里虽然不能詳述，但須指出：Hilbert 的公理体系分为五群，而分別地称为結合、順序、合同、連續和平行的公理. 如果这五群公理全部成立，那末就变为欧几里得几何；如果前四群公理成立而平行的公理不成立，那末便称它为双曲的非欧几里得几何.

容易驗証，我們上文所述的 Poincaré 平面的几何满足結合、順序、合同和連續的公理. 可是，只有平行的公理不成立. 实际上，当一伪直綫 l 和不在其上的一点 A 是給定时，通过 A 可引无穷多伪直綫和 l 不相交. 为闡明这个事实，如图 4·28 所示，在 l 和 x 軸的两交点各引伪直綫 m_1，m_2 使通过 A 并和 l 相切；很明显，m_1 和 m_2

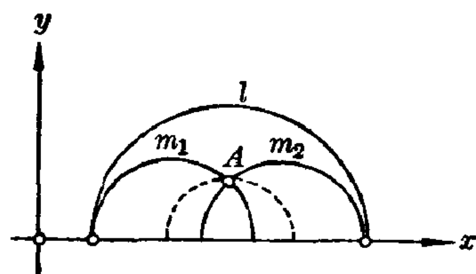


图　4·28

的每条与 l 决不在离 A 的有限距离的点相交. 在 m_1, m_2 所成的角中, 挑出那两个不含有 l 在内的对頂角, 而且从 A 在这两对頂角內所引的伪直綫和 l 在所論的二維空間里不相交. 这表明了平行的公理不成立, 而通过 A 有无穷多和 l 不相交的直綫.

在 xy 平面上作成的上述几何是 Poincaré 想出来的几何, 而且經常利用它来証明非欧几里得几何是在論理上无矛盾的体系.

这样一来, 已明确了伪球这一曲面上的几何与双曲的非欧几里得几何之間的密切关系.

【习題】

1. 当采用适当的参数表示时, 証明 Gauss 曲率一定的曲面的綫素可以写成如下形式:

如果 $K>0$, $ds^2=du^2+\cos^2(\sqrt{K}\,u)\,dv^2$;

如果 $K=0$, $ds^2=du^2+dv^2$;

如果 $K<0$, $ds^2=du^2+\cosh^2(\sqrt{-K}\,u)\,dv^2$,

式中 $\cosh\phi=\frac{1}{2}(e^{+\phi}+e^{-\phi})$.

2. 設在曲面上有这样的两系曲綫, 使得各系中各有一条曲綫通过曲面上的每一点, 称这两系曲綫为**曲綫网**. 如果两系曲綫中的任何两条直交, 而且各系曲綫的测地曲率是不等于 0 的常数, 証明所論的曲面是負常曲率曲面.

3. 証明在双曲的非欧几里得几何里三角形的內角之和小于二直角.

4. 設四点 z_1, z_2, z_3, z_4 是一圓周上的四定点, 而且 z_0 是其上的任意点, 証明 z_1, z_2, z_3, z_4 在这次序下的交比决定于

$$(z_1z_2,\ z_3z_4)=\frac{\sin\angle z_1z_0z_3}{\sin\angle z_2z_0z_3}:\frac{\sin\angle z_1z_0z_4}{\sin\angle z_2z_0z_4},$$

式中 $\angle z_1z_0z_3$ 表示两綫段 z_0z_1, z_0z_3 所成的有向角.

4·8 Gauss-Bonnet 定理

在曲面論里特别重要的定理之一是所謂 Gauss-Bonnet 定理. 本节将加以說明.

定理 (Gauss-Bonnet)　設在 C^2 級曲面 S 上給定了一条由有限个 C^2 級曲綫弧所綴成的单純閉曲綫 C，并且它圍成单連通領域 D. 設 m 条 C^2 級曲綫弧接成这閉曲綫，而且这些接合点是相邻二曲綫弧构成的内角 $\alpha_\lambda(\lambda=1, 2, \cdots, m)$ 的角点，那末成立

$$\oint_C k_g\,ds+\sum(\pi-\alpha_\lambda)+\iint_D K\,dA=2\pi. \tag{4·102}$$

特别地，当 C 沒有角点时，

$$\oint_C k_g ds+\iint_D K\,dA=2\pi. \tag{4·103}$$

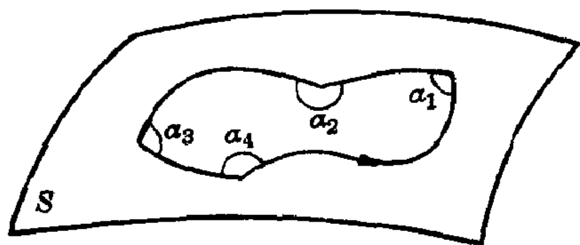


图　4·29

在这里 s 是曲綫的弧长，而且当点 P 这样沿 C 一周，使 D 出現于站在切綫正側的观察者的左側时，s 是增加的；k_g 是曲綫 C 的測地曲率，$\oint$ 表示沿 C 一周的积分；K 表示領域 D 的各点的 Gauss 曲率，而且 dA 表示 D 的面积元素，即

$$dA=\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv. \tag{4·104}$$

Gauss-Bonnet 定理是欧几里得平面几何基本定理"三角形的内角之和等于二直角"和球面几何的定理"球面三角形 ABC 的面积 F 与其球面盈余成比例"即

$$F=a^2(A+B+C-\pi)$$

(a 是球的半徑)的拓广. 后者又可看成椭圓的非欧几里得几何里关于三角形的内角之和的定理. 同样，当 $K=-\dfrac{1}{a^2}$ 时，便得到双曲的非欧几里得几何的定理"三角形 ABC 的面积 F 与其角亏缺成比例"即

$$F=a^2(\pi-A-B-C).$$

从这样成为初等几何基础的定理拓广的事实看出，Gauss-Bonnet

定理在微分几何里是曲綫論的最重要定理之一。

可分割为有限个曲綫多角形的沒有边緣的曲面称为**閉曲面**。当在曲面上的一点的周圍添附 ↻ 記号的充分小閉曲綫，并且把它在曲面上連續移动，使回到原位置时，如果 ↻ 記号恒是保持同一定向，而决不发生反对的定向即决不变成 ↺ 記号，那末称它为**可定向曲面**。例如，球面和游泳圈(称为环面)等都属于这类。也有不可定向的曲面。例如图 4.30 所示，取长条的紙，把它扭一次，使左端的 AB 和右端的 AB 这样重合起来，A 和 A、B 和 B 互相貼合，便得到图 4.30 中的曲面。这是不可定向的曲面的一例，称为 **Möbius 的带**。这个曲面是有边緣的，但是当然也可作出許許多多不可定向的閉曲面。例如，在 4·6 所述的射影平面是不可定向的曲面。

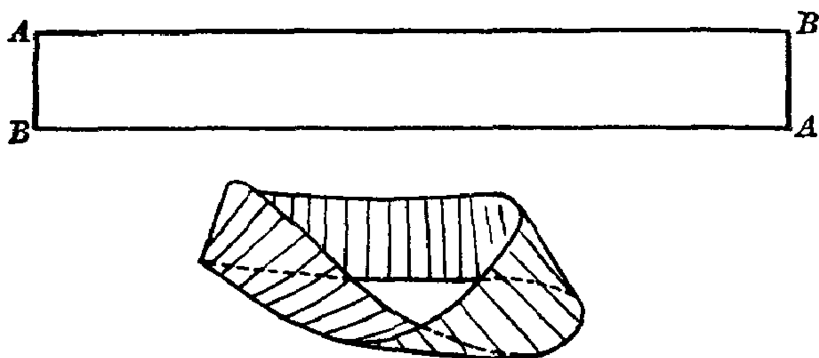


图 4·30

只要象上图所示的，作出 Möbius 的带，便可明了这个事实。在三維欧几里得空間里所謂可定向曲面又可說成是可区别表里的曲面。

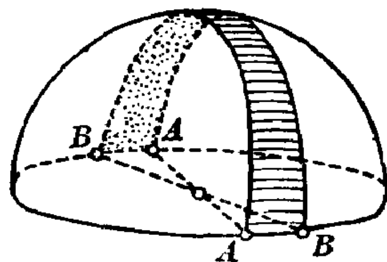


图 4·31

Gauss-Bonnet 定理不仅作为微分几何的定理是重要的，而且作为給出微分几何与二維曲面的拓扑学間的联系的定理还具有显著的特征。实际上，把 C^2 級任意可定向閉曲面用其上所画的 C^2 級曲綫弧分割成为有限个曲綫多角形，而且对每一个曲綫多角形应用 Gauss-Bonnet 定理，

便知道

$$\oint k_g\,ds+\sum(\pi-\alpha)+\iint K\,dA=2\pi,$$

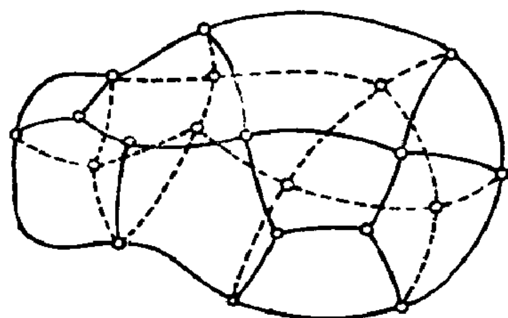


图　4·32

式中 α 表示所論曲綫多角形在頂点的內角．对于所有曲綫多角形作出这样的式子而且加起来；对于每一边来說，$\oint k_g\,ds$ 是在以这边为一边的两个曲綫多角形里以不同的定向分别地各一次經过这边的，所以产生絕对值相等而符号不同的两值，从而加起来就变为 0．因此，成立

$$\sum(\pi-\alpha)+\iint_S K\,dA=2\pi f,$$

这里 e, k, f 分别地表示所論多角形分割中的頂点、边、面（多角形）的个数，$\sum$ 是关于所有曲綫多角形的一切內角所取的，而且 $\iint$ 是取遍曲面 S 的全体的．这样一来，$\sum\alpha=2\pi e$ 并且 $\sum\pi$ 可以看做 π 的这样的倍数，就是 f 个多角形的每个有关的頂点的个数，从而是每个多角形的边的个数，所以 $\sum\pi=2\pi k$．因而导出

$$\iint_S K\,dA=2\pi\chi(S),\tag{4·105}$$

式中

$$\chi(S)=e-k+f.$$

$\chi(S)$ 是被称为所論閉曲面的 **Euler 示性数**；如所知，它是在同胚映象下的不变式(方便上，单称为**拓扑不变式**)．

$\chi(S)$ 是拓扑不变式这个事实的严密証明是属于拓扑学的范圍的，但是，从(4·105)式虽然比較粗糙也可得出直观的証明．

实际上，假設固定曲面 S 的細胞分割而把它的形状弯撓之后

得出的曲面是 S'，从(4·105)式获得

$$\iint_{S'} K\,dA = \iint_{S} K\,dA.$$

可是对于 S' 的任意的曲綫多角形分割成立

$$\iint_{S'} K\,dA = 2\pi\chi(S'),$$

所以看出对于閉曲面 S 和其同胚映象的象曲面 S' 必成立关系 $\chi(S)=\chi(S')$. 这就是說，$\chi(S)$ 是拓扑不变式.

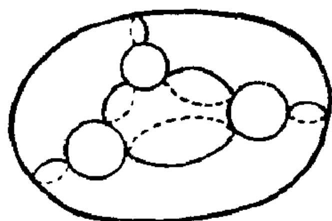


图 4·33

容易驗証，球面和环面的 Euler 示性数分别是 0 和 1. 一般地象餅干这样形状的曲面穿了 p 个空洞之后，所得到的曲面称为**亏格** p 的曲面. 如所知，对于这种曲面成立

$$\chi(S)=2(1-p).$$

(上图是 $p=3$ 的情况.)

通称的 Euler 多面体定理是判定在初等几何意义下多面体的頂点、棱、面的个数 e, k, f 之間存在着的关系

$$e-k+f=2. \tag{4·106}$$

把这多面体看为橡皮做成的，把空气打进去使它膨脹起来，变成一个球面. 这样一来，球面是被給定的多角形的頂点、棱、面的象构成的曲綫多角形所分割的，所以成立

$$\int K\,dA = 2\pi\chi.$$

可是就所論的球面說来，$K=\frac{1}{a^2}$ 而且面积是 $4\pi a^2$，所以从上式得出 $\chi=2$. 由于在球面的所論曲綫多角形分割下，頂点、棱、面的个数和給定的多面体的显然沒有改变，我們便获得了(4·106)式的微分几何的証明.

下面将証明 Gauss-Bonnet 定理.

証明[第一段]　在 S 上对有限个 C^2 級曲綫弧圍成的領域用 C^2 級曲綫弧再分割为充分小曲綫多角形．这里所謂充分小的意义是这样：对如此分割成的每一个曲綫多角形适当地作出参数表示，使得通过这曲綫多角形的内部的某一点而由关于所論参数 (u,v) 的一次方程給定的曲綫，恰恰在两点横截所論的曲綫多角形．

假如关于这样的每一个小曲綫多角形已經証明了 Gauss-Bonnet 定理的話，那末关于最初給定的大曲綫多角形 C 定理也照样成立．为闡明这个事实，就每一个曲綫多角形作出下式：

$$\oint k_g\,ds+\sum(\pi-\alpha)+\iint K\,dA=2\pi, \qquad (4\cdot107)$$

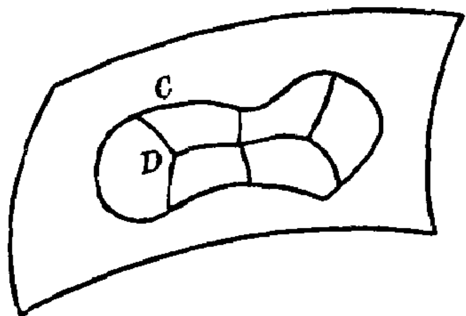


图　4·34

而且这些式全部边边相加；凡是不属于 D 的境界而在其内部的边是相邻两多角形的公共边，所以在这边上討論 $\int k_g\,ds$ 的时候，由于曲綫的定向相反，k_g 的符号要改变，而因此在这些边上 $\int k_g\,ds$ 相抵消．这样一来，只剩下关于 D 的境界上的边所作的积分 $\int k_g\,ds$，終于得到

$$\oint_C k_g\,ds.$$

其次，在 $\sum(\pi-\alpha)$ 里 $\sum$ 是关于各頂点作和的，而且其中 $\sum\pi$ 的部分不妨看作为关于各边所作的和，所以

$$\sum\pi=2\pi k-\sum{}'\pi$$

（式中 $\sum'$ 是关于 C 的各边作和的，k 是在 D 的边数），并且

$$\sum\alpha=2\pi e-\sum{}''\beta$$

（式中 $\sum''$ 是关于 C 的各頂点作和的，β 是 C 在各頂点的外角，e 是在 D 的頂点数目），从而成立

$$\sum(\pi-\alpha)=2\pi(k-e)+\sum{}''(\beta-\pi)$$
$$=2\pi(k-e)+\sum{}''(\pi-\alpha).$$

另一方面，(4·107)的右边之和是 $2\pi f$ (f 是在 D 的曲綫多角形数目)，所以得到

$$\oint_C k_g\,ds+\sum{}''(\pi-\alpha)+\iint_D K\,dA=2\pi(e-k+f).$$

可是，如果把曲面的所論多角形分割稍加以弯曲，使它貼合在适当的大半徑的球面上，在球面上沒有被这多角形的网所复盖着的部分又是一个曲綫多角形。从凸多面体有关的 Euler 定理看出

$$e-k+f+1=2,$$

即

$$e-k+f=1.$$

因此，当改写 $\sum''$ 为 $\sum$ 时，得到了

$$\oint_C k_g\,ds+\sum(\pi-\alpha)+\iint_D K\,dA=2\pi.$$

[第二段] 設曲面上的曲綫在其各点的切綫与曲面的一阶标形的向量 $\mathbf{e}_1$ 做成的角为 θ，那末这曲綫的測地曲率决定于

$$k_g=\frac{d\theta}{ds}+\frac{\omega_{12}}{ds}. \tag{4·108}$$

为証明这式，注意到所謂測地曲率就是把給定的曲綫的曲率向量 $\mathbf{x}''(s)$ 向曲面上的点 $\mathbf{x}(s)$ 的切平面引的正射影向量的长。可是

$$\mathbf{x}''=\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{\omega_1}{ds}\right)+\frac{\omega_2}{ds}\,\frac{\omega_{21}}{ds}\right]\mathbf{e}_1+\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{\omega_2}{ds}\right)+\frac{\omega_1}{ds}\,\frac{\omega_{12}}{ds}\right]\mathbf{e}_1$$
$$+[*]\mathbf{e}_3,$$

所以把

$$\frac{\omega_1}{ds}=\cos\theta,\qquad \frac{\omega_2}{ds}=\sin\theta$$

代入这里，便得到

$$\mathbf{x}''=\left(\frac{d\theta}{ds}+\frac{\omega_{12}}{ds}\right)(-\sin\theta\cdot\mathbf{e}_1+\cos\theta\cdot\mathbf{e}_2)+[*]\mathbf{e}_3.$$

如果注意到 $-\sin\theta\cdot\mathbf{e}_1+\cos\theta\cdot\mathbf{e}_2$ 是同 $\mathbf{x}''$ 在所論的切平面上的正射影向量有同一方向的单位向量，便可明了正射影向量的长决定于(4·108)。

[第三段]　按照第一段中所論，我們只須对充分小曲綫多角形証明定理就够了。首先在这里假定它沒有角点，从而所論的閉曲綫 C 是处处平滑的。

在 C 所圍成的曲面片 F 上的各点，比如用 94 頁里所述的方法唯一地确定对应的一阶标形，并假設曲面上的单位向量和一阶标形在其起点的向量 $\mathbf{e}_1$ 做成的角是 θ。

設所論曲面片 F 的参数表示的領域是 D_0，而且 $(u, v)\in D_0$。

在曲面片 F 上的各点引 F 的单位切綫向量，这样的切綫向量集 R 是由三个变数組 (u, v, θ) 表达出来的，在这里 $(u, v)\in D_0$，$-\infty<\theta<+\infty$ 而且假定

$$(u, v, \theta)\equiv(u, v, \theta+2m\pi)\quad(m\ 整数).$$

所以 R 可以看成三維空間；称它为**纤維丛空間**。

在纤維丛空間里如果 θ 是 (u, v) 的单值連續函数，那末决定了一个二維曲面。称它为曲面片 F 上的**横截面**。

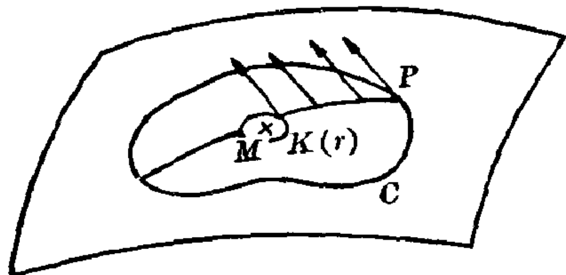


图　4·35

由于曲面片 F 是充分小的，从假定可以适当地选取 C^2 級的参数 (u, v) 使得通过 D 内所取的一点 M 并且由关于 (u, v) 的一次方程所表达的曲綫与 C 仅在两点相交。这条曲綫被 M 分成两部分，簡便上称各部分为**射綫**。

在 C 上的点 P 引 C 的切綫，而且在通过 P 的射綫上的各点引单位向量使它关于預先选定的一阶标形的相对支量等于 C 在 P 的切綫的相对支量. 这样一来，在給定的曲面片 F 上产生了单位切綫向量的連續集，称它为**向量場**.

仅在点 M 是不能唯一地确定这样的向量的，所以 M 是所論向量場的**奇异点**. 这个向量場构成纤維丛空間里的横截面. 当然，只有在点 M 所对应的 $\theta(u, v)$ 不能唯一地确定起来.

我們称这横截面为 F^*，而且 F^* 的边緣对应于給定的 F 的边緣 C，称前者的曲綫为 C^*. 又以 M 为中心而在 F 上画一个半徑 r 的充分小測地圓 $K(r)$，而且在 F^* 上称对应于这圓 $K(r)$ 的曲綫为 $K(r)^*$.

現在按照結构方程写下

$$\omega'_{12}=[\omega_{13}\omega_{32}].$$

从(3·25)代入这里，便变成

$$\omega'_{12}=(b^2-ac)[\omega_1\omega_2].$$

如果注意到 $[\omega_1\omega_2]$ 是曲面的面积元素这一事实，就得出

$$\omega'_{12}=-K\,dA. \tag{4·109}$$

在纤維丛空間里

$$\omega'_{12}=(d\theta+\omega_{12})';$$

如果 T^* 是从 F^* 挖去对应于 $K(r)$ 的內部的部分而得出来的，在 T^* 上 $d\theta+\omega_{12}$ 是二变数 u, v 的 Pfaff 形式，所以从 Green 定理得到

$$\iint_{T^*}\omega'_{12}=\int_{C^*}d\theta+\omega_{12}-\int_{K(r)^*}d\theta+\omega_{12}. \tag{4·110}$$

可是左边的被积分函数按照(4·109)是 F 的微分形式，从头就和 θ 沒有关系，所以

$$\text{左边}=-\iint_{S-K(r)}K\,dA,$$

且从而当 $r\to 0$ 时,变为

$$-\iint_S K\,dA.$$

至于(4·110)的右边第一项按照(4·108)等于

$$\oint_C k_g\,ds.$$

此外,右边第二项中的 ω_{12} 是具有

$$\omega_{12}=\lambda_1\omega_1+\lambda_2\omega_2$$

的形式,而 ω_1, ω_2 并不包含 $d\theta$ 的項,所以当 $r\to 0$ 时,积分領域 $K(r)^*$ 变为无穷小,从而 $\int_{K(r)^*}\omega_{12}\to 0$. 并且很明显地 $\int_{K(r)^*}d\theta$ 是 2π. 这样一来,当在(4·110)式里 $r\to 0$ 时,便获得

$$\oint_C k_g\,ds+\iint_F K\,dA=2\pi.$$

[第四段] 到此为止假定了 C 沒有角点. 在具有角点的情况下,設任何一个是 A, 其内角是 α. 在 A 的充分小領域里进行 $\int_{C^*}d\theta+\omega_{12}$ 的时候,从第三段的同一理由 $\int\omega_{12}$ 变为无穷小,但是从 $\int d\theta$ 则产生 $\pi-\alpha$. 所以在具有角点的情况下获得了(4·107)式.

从 Gauss-Bonnet 定理还可看出下列的事項:

考察 C^2 級的曲綫弧,設其弧长是 s. 在其上一点 s 和充分邻近点 $s+\Delta s$ 各引和曲綫弧相切的測地綫,并且应用 Gauss-Bonnet 定理到所引两測地綫和曲綫弧 $\widehat{s,\ s+\Delta s}$ 所圍成的三角形,便得到

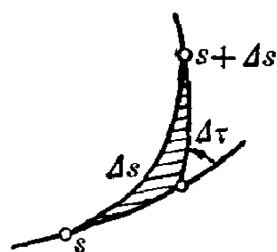


图 4·36

$$\oint k_g\,ds+2\pi\pm\Delta\tau+\iint K\,dA=2\pi.$$

左边的 2π 是分别地在頂点 s, $s+\Delta s$ 各各生成一个 π 的結果, $\Delta\tau$ 表示在点 s 的測地綫与在点 $s+\Delta s$ 的測地綫的

交角；$\pm\Delta\tau$ 一項的复号是如下所述地来确定的：在所論三角形的边上給与一周的正向，使得从曲面的正側观望这三角形，它的內部恒在左側；如果这个正向和給定曲綫的正向在弧 s，$\widehat{s+\Delta s}$ 上一致，那末采用正号；反之，就采用負号.

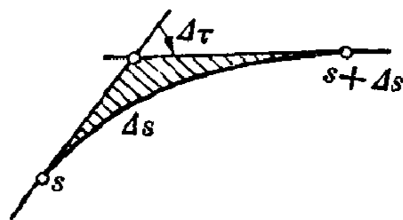


图 4·37

可是測地綫就是在其各点的測地曲率等于 0 的曲綫，而且当 $\Delta s\to 0$ 时，面积是关于 Δs 的二次无穷小量，所以得到关系式

$$k_g=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\tau}{\Delta s}. \tag{4·111}$$

因此，在曲綫 C 上的一点 s_0 其測地曲率是正的这个事項意味着曲綫上对应于 $s>s_0$ 而且 s_0 的邻域的值的部分要在 C 在点 s_0 的切測地綫的左側. 很明显，(4·111) 式是平面曲綫曲率定义的类似式.

在应用 Gauss-Bonnet 定理的时候，值得注意的是：由閉曲綫 C 圍成的領域 D 是所論曲面的一部分，并且它是单連通的. 有的书本往往忘掉这一点而导出了錯誤的結論. 例如，"在負曲率的曲面上測地綫和它本身不相交"、"負曲率的曲面上不存在閉測地綫(作为沒有角点的閉曲綫的測地綫)"等結論就是属于这类的. 比方拿前者来說，假如相交的話，必然会产生由測地綫弧做成的而且至多具有一个角点的閉曲綫；設在曲面上由这閉曲綫圍成的領域是 D，如果应用 Gauss-Bonnet 定理到这里来，便得到

$$\pi-\alpha+\iint K\,dA=2\pi,$$

$$\therefore\quad \iint K\,dA=\pi+\alpha.$$

这样一来，左边恒是負数，而右边恒是正数，就发生了矛盾. 这就是在負曲率曲面上測地綫不能和自己相交的所謂証明. 可是，在单叶双曲面上选定一点 A，把細短的橡皮筋如图 4.38 所示一样

紧綳在曲面上，这就是以 A 为角点的测地綫，而且上述的証明所以不能适用的理由是在于：橡皮筋的圈子在单叶双曲面上并不作成单連通的領域．如果置单叶双曲面的方程为

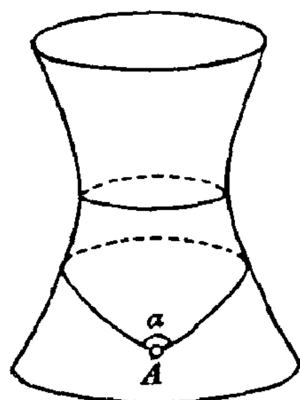


图 4·38

$$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}-\frac{x_3^2}{a_3^2}=1,$$

它和 $x_3=0$ 的交綫的椭圓是閉測地綫．从而很明显地可以看出在負曲率的曲面上閉測地綫的存在的可能性．

4·9 卵形面的剛性

在本书里原来打算更多地叙述关于整体微分几何的定理，但是由于現在已超过預定的頁数，很遺憾地只好在本节举出一个例子来做結束．

定理(Cohn-Vossen) C^2 級的互为等长而且处处有正的 Gauss 曲率的两个卵形面必須是合同的。

証明 对于卵形面 S 这样选取标形 $\mathbf{x}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$，使得在其上各点 $\mathbf{x}$ 的法綫 $\mathbf{e}_3$ 向着 S 的外側。

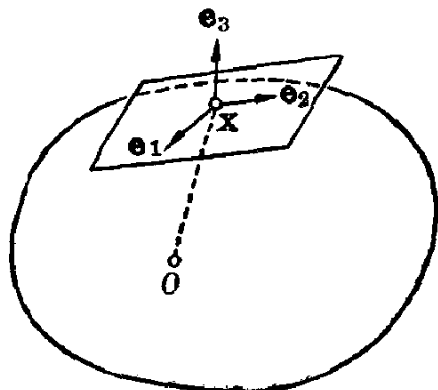


图 4·39

設 T 是 S 与另一卵形面 $\bar{S}$ 間的等长的点对应，而且置 $\bar{\mathbf{x}}=T(\mathbf{x})$． 很明显，用 T 也同时决定了 S 在 $\mathbf{x}$ 的切綫向量与 $\bar{S}$ 在 $\bar{\mathbf{x}}$ 的切綫向量間的一对一的对应．如果按照

$$\bar{\mathbf{e}}_1=T(\mathbf{e}_1),\quad \bar{\mathbf{e}}_2=T(\mathbf{e}_2)$$

表示这个对应，从 T 的等长性质看出：在

$$d\mathbf{x}=\omega_1\mathbf{e}_1+\omega_2\mathbf{e}_2,$$
$$d\bar{\mathbf{x}}=\bar{\omega}_1\bar{\mathbf{e}}_1+\bar{\omega}_2\bar{\mathbf{e}}_2$$

里如果 $\bar{\mathbf{x}}+d\bar{\mathbf{x}}=T(\mathbf{x}+d\mathbf{x})$，那末成立

$$\omega_1=\bar{\omega}_1, \quad \omega_2=\bar{\omega}_2. \tag{4·112}$$

可是在 $\bar{S}$ 所作的向量 $\bar{\mathbf{e}}_1\times\bar{\mathbf{e}}_2$ 究竟还是向着曲面的外側，还是向着內側，仍旧不明确．在这里假設它是向着內側的，那末对 $\bar{S}$ 运用一个关于定平面的对称变换，使得新卵形面上的 $\bar{\mathbf{e}}_1\times\bar{\mathbf{e}}_2$ 向着它的外側．如果能証这新卵形面按运动可以使之重合于 S，那末 S 和 $\bar{S}$ 成为合同，所以从头假定 $\bar{S}$ 上的 $\bar{\mathbf{e}}_1\times\bar{\mathbf{e}}_2$ 是向着 $\bar{S}$ 的外側的法綫向量来討論，也不妨碍問題的一般性．

現在把記号 $\mathbf{x}$ 看做表示从固定坐标系原点 O 向着 $\mathbf{x}$ 的向量，作出数量积 $\mathbf{x}\mathbf{e}_i$，并且置

$$y_a=\mathbf{x}\mathbf{e}_a, \quad y_3=\mathbf{x}\mathbf{e}_3.$$

在这里 $a=1, 2$，而以后經常用 a, b, c 等指标来表达 1, 2. 这样一来，

$$dy_a=d\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_a+\mathbf{x}\cdot d\mathbf{e}_a=\omega_b\mathbf{e}_b\cdot\mathbf{e}_a+\mathbf{x}\cdot(\omega_{ab}\mathbf{e}_b+\omega_{a3}\mathbf{e}_3),$$

从而成立

$$\left.\begin{aligned} dy_1&=\omega_1+y_2\omega_{12}+y_3\omega_{13},\\ dy_2&=\omega_2+y_1\omega_{21}+y_3\omega_{23}.\end{aligned}\right\} \tag{4·113}$$

对于曲面 $\bar{S}$ 也同样成立两个类似式．另外，对于式子

$$(y_1\bar{\omega}_{23}-y_2\bar{\omega}_{13})'=[dy_1\bar{\omega}_{23}]+y_1\bar{\omega}'_{23}-[dy_2\bar{\omega}_{13}]-y_2\bar{\omega}'_{13}$$

的右边代入(4·113)和关于 $\bar{S}$ 的結构方程，便得知这式等于

$$[\omega_1\bar{\omega}_{23}]-[\omega_2\bar{\omega}_{13}]+y_3([\omega_{13}\bar{\omega}_{23}]-[\omega_{23}\bar{\omega}_{13}]).$$

可是

$$\left.\begin{aligned} \bar{\omega}_{13}&=\bar{\lambda}_{11}\bar{\omega}_1+\bar{\lambda}_{12}\bar{\omega}_2,\\ \bar{\omega}_{23}&=\bar{\lambda}_{21}\bar{\omega}_1+\bar{\lambda}_{22}\bar{\omega}_2,\end{aligned}\right\} \quad (\bar{\lambda}_{12}=\bar{\lambda}_{21}), \tag{4·114}$$

所以在(4·113)式的演算下可以改写上式为

$$\begin{aligned}&(y_1\bar{\omega}_{23}-y_2\bar{\omega}_{13})'\\ &\qquad=\{(\bar{\lambda}_{11}+\bar{\lambda}_{22})+y_3(\lambda_{11}\bar{\lambda}_{22}+\bar{\lambda}_{11}\lambda_{22}-2\lambda_{12}\bar{\lambda}_{12})\}[\omega_1\omega_2].\end{aligned}$$

因为

$$H=\frac{1}{2}(\lambda_{11}+\lambda_{22}),$$

$$K=\lambda_{11}\lambda_{22}-\lambda_{12}^2,$$

而且关于 $\bar{H}$, $\bar{K}$ 也有类似式，置

$$J=\lambda_{11}\bar{\lambda}_{22}+\bar{\lambda}_{11}\lambda_{22}-2\lambda_{12}\bar{\lambda}_{12},$$

又可改写上式为

$$(y_1\bar{\omega}_{23}-y_2\bar{\omega}_{13})'=(2\bar{H}+y_3J)[\omega_1\omega_2]. \qquad (4\cdot115)$$

在这里适当地細分所論的曲面为小曲綫多角形，并且对于所論的曲面的各部分各各作出参数表示，使得每个多角形分别地被包含在其内部. 又置

$$\omega=y_1\bar{\omega}_{23}-y_2\bar{\omega}_{13},$$

那末 ω 是 (u, v) 平面的 Pfaff 形式. 設 D 是所論曲綫多角形圍成的領域在 (u, v) 平面上的对应領域，而且 C 是它的境界，从 Green 定理得到

$$\int_C\omega=\int_D\omega'.$$

但是，在两边都求积分的情况下，把問題看成是用了参数表示而回到 (u, v) 平面上来进行的过程，便可写成

$$\int_{C^*}\omega=\int_{D^*}\omega', \qquad (4\cdot116)$$

式中 D^* 是用曲面上的所論曲綫多角形圍成的領域，C^* 是表示其境界的曲綫多角形本身的，并且假定在求左边积分的时候必須这样繞曲綫多角形 C^* 一周，使得領域 D^* 恒在左側出現.

这样，关于給定的卵形面上的每个分割曲綫多角形必成立和(4·116)类似的式子；現在把这些式子边边相加. 由于任何一个曲綫多角形的边恰恰是两个曲綫多角形的边，而且在积分的时候，这两个多角形是在这边上沿相反的方向来积分的，絕对值相等而符

号相反，所以相加的結果，左边变为 0. 另一方面，右边是在卵形面全体上把 ω' 积分起来的，所以

$$\int_S \omega' = 0.$$

因此，如在 207 頁所述一样，置

$$[\omega_1\omega_2] = dA,$$

并注意到 dA 是表面积元素，从 (4·115)，(4·116) 看出

$$2\int \overline{H}\,dA + \int y_3 J\,dA = 0. \tag{4·117}$$

如果考察 S 与 $\overline{S}$ 重合的情况，由最后式导出

$$2\int H\,dA + 2\int y_3 K\,dA = 0. \tag{4·118}$$

从 (4·118) 减去 (4·117)，就有

$$2\int H\,dA - 2\int \overline{H}\,dA = \int y_3 (J - 2K)\,dA. \tag{4·119}$$

在这里很明显，

$$J - 2K = -\begin{vmatrix} \bar{\lambda}_{11} - \lambda_{11} & \bar{\lambda}_{12} - \lambda_{12} \\ \bar{\lambda}_{12} - \lambda_{12} & \bar{\lambda}_{22} - \lambda_{22} \end{vmatrix}. \tag{4·120}$$

如果記右边行列式为 Δ，那末

$$\Delta \leqslant 0. \tag{4·121}$$

实际上，因为两曲面 S，$\overline{S}$ 在对应点的法綫都是向外的，不妨把两个二次形式

$$\Lambda = \lambda_{11}x_1^2 + 2\lambda_{12}x_1x_2 + \lambda_{22}x_2^2,$$

$$\overline{\Lambda} = \bar{\lambda}_{11}x_1^2 + 2\bar{\lambda}_{12}x_1x_2 + \bar{\lambda}_{22}x_2^2$$

看做都是正定值或者半正定值。

如果对二次形式 Λ，$\overline{\Lambda}$ 运用一次变換

$$x_a = l_{ab}x'_b, \quad |l_{ab}| \neq 0, \tag{4·122}$$

正定值、半正定值等性质不改变，而且

$$|\lambda'_{ab}| = |l_{ab}|^2 \cdot |\lambda_{ab}|,$$

所以就变换后的二次形式来討論 Δ，也是可以的。可是按照代数学中有关主軸問題的定理只要适当地运用一次变换(4·122)，便可使 A，$\bar{A}$ 同时化为

$$A = \lambda_{11}x_1^2 + \lambda_{22}x_2^2, \quad \lambda_{12} = 0;$$
$$\bar{A} = \bar{\lambda}_{11}x_1^2 + \bar{\lambda}_{22}x_2^2, \quad \bar{\lambda}_{12} = 0,$$

式中

$$\lambda_{11},\ \lambda_{22} \geqslant 0,$$
$$\bar{\lambda}_{11},\ \bar{\lambda}_{22} \geqslant 0.$$

另外，因为 S，$\bar{S}$ 是等长的，在对应点的 Gauss 曲率相等，就是

$$\lambda_{11}\lambda_{22} = \bar{\lambda}_{11}\bar{\lambda}_{22}. \tag{4·123}$$

从而所論的行列式 Δ 是

$$\Delta = (\bar{\lambda}_{11} - \lambda_{11})(\bar{\lambda}_{22} - \lambda_{22}) = -\frac{\lambda_{22}}{\bar{\lambda}_{11}}(\bar{\lambda}_{11} - \lambda_{11})^2 \leqslant 0.$$

Δ 变为 0 的时候只限于 $\bar{\lambda}_{11} = \lambda_{11}$，因而从(4·123)得出 $\lambda_{22} = \bar{\lambda}_{22}$，也就是說：只限于 A，$\bar{A}$ 重合的时候。

現在，把点 O 选在卵形面 S 的內部，就可以恒使 $y_3 > 0$，所以从(4·119)，(4·120)，(4·121)看出

$$\int H\,dA - \int \bar{H}\,dA \geqslant 0.$$

如果对調曲面 S，$\bar{S}$ 的位置，同样地成立

$$\int \bar{H}\,dA - \int H\,dA \geqslant 0.$$

所以得到

$$\int H\,dA = \int \bar{H}\,dA.$$

从这式及(4·119)，(4·120)获得

$$\int y_3 \Delta\,dA = 0,$$

可是 $y_3>0$，而且(4·121)成立，要使这式成立，$\Delta=0$ 且从而

$$\lambda_{11}=\bar{\lambda}_{11}, \quad \lambda_{12}=\bar{\lambda}_{12}, \quad \lambda_{22}=\bar{\lambda}_{22}$$

必須成立。从(4·114)这意味着

$$\omega_{13}=\bar{\omega}_{13}, \quad \omega_{23}=\bar{\omega}_{23}. \tag{4·124}$$

按照(4·112)，S 和 $\bar{S}$ 的第一基本形式相等，而且按照(4·124)，第二基本形式也相等．因而，根据3·9的 Gauss 定理得知 S，$\bar{S}$ 是用运动可使其重合的。

結 束 語

由于篇幅的关系有許多內容不能列人本书；最后想在这些內容中仅就特别重要的极小曲面叙述其定义.

在曲面 S 的任意点的邻域画适当小的单純閉曲綫 C，使从 S 可以切削下形如圓板的曲面片，当这曲面片的面积比其他以同一 C 为边緣的所有曲面片的面积都来得小时，称原曲面 S 为**极小曲面**. 极小曲面是二重积分 $J=\iint\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$ 的变分問題 $\delta J=0$ 的极值曲面，而且中曲率 $H=0$ 这个性质是其特征. 极小曲面論和变分学、复变函数論、拓扑学等都有密切关系. 从实驗方面說来，把金属圈浸在肥皂水里，使在金属圈上張成薄膜，如果略去重力的影响，这是极小曲面.

本稿就在这里結束了，如果讀者們能够从此稍許引起对微分几何的兴趣，著者就会感到无比欢慰。

索　引

(除西文外，汉字按拼音字母排列)

t

w

x

y

z